

HIPOTÉZISVIZSGÁLATOK, STATISZTIKAI PRÓBÁK

Hipotézisvizsgálat alapgondolata

A sokaság érdekel, de a minta van a kezünkben.

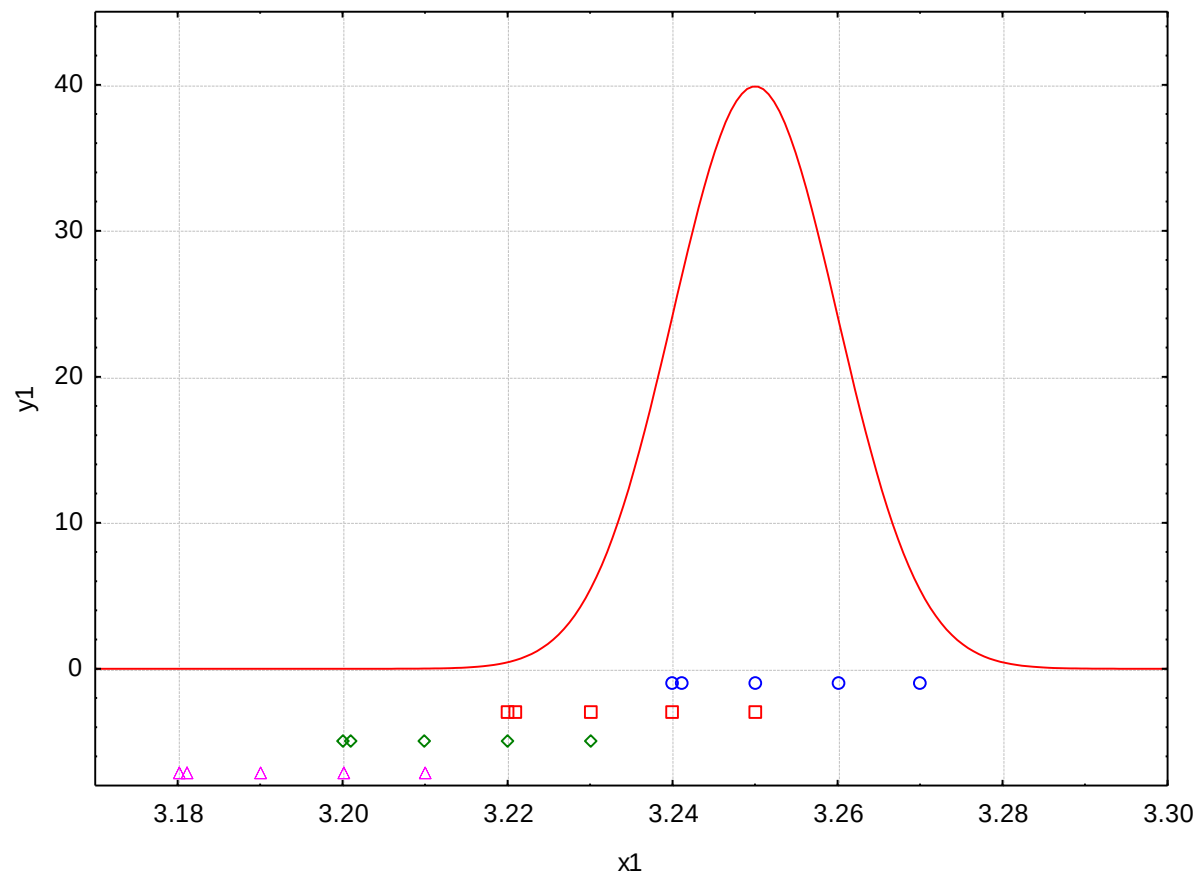
Elmúlt előadásokon: statisztikai következtetés (becslés)

minta (mérési eredmények) $\rightarrow$ sokaság paramétereinek becslése

Hipotézisvizsgálat:

Az alapsokaságra vonatkozóan valamilyen feltevéssel élünk (pl. μ és/vagy σ értéke) és azt a mérési adatokból számolt **statisztikai próbával ellenőrizzük.**

Szemléltető ábra a hipotézisvizsgálat alapgondolatához

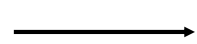


Jöhetnek-e az adatok olyan eloszlásból, hogy: $\mu = \mu_0 = 3,25$?

z-próba alapelve

$H_0 : \mu = \mu_0$ nullhipotézis

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$



$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

próbatatisztika

értéke 0,
ha H_0 igaz

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} =$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$+ \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

z-eloszlású

- ✓ Ha H_0 igaz, $z_0 \sim z$
- ✓ Ha z_0 olyan értékeket vesz föl, amelyeneket z szokott, elfogadjuk a nullhipotézist

z-próba menete

1. **Nullhipotézis** felírása: $H_0 : \mu = \mu_0$

2. **Ellenhipotézis** megfogalmazása:

$H_1 : \mu \neq \mu_0$, vagy $H_1 : \mu < \mu_0$, vagy $H_1 : \mu > \mu_0$.

3. **Próbastatisztika** aktuális értékének kiszámítása:

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

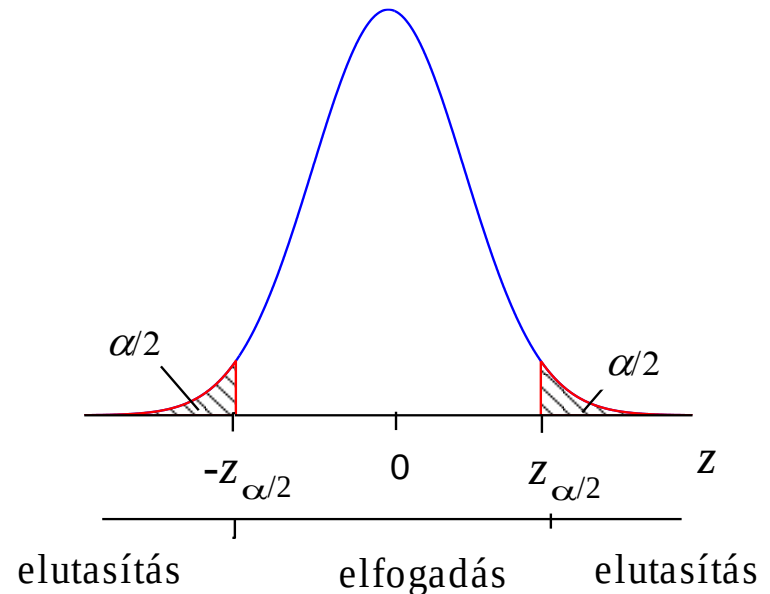
Próbastatisztika tulajdonságai:

- kiszámítható a mintából
- eloszlása H_0 igazsága esetén ismert

4. Elfogadási tartomány kijelölése az előírt α szignifikanciaszinthez:

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ esetén

$$P(-z_{\alpha/2} < z_0 \leq z_{\alpha/2} | H_0) = 1 - \alpha$$



5. Döntés:

- megvizsgáljuk, hogy a próbastatisztika kiszámított értéke az elfogadási tartományban van-e
- ha igen, elfogadjuk a nullhipotézist
- ha nem, elutasítjuk a nullhipotézist

1. példa

Táramérlegen négy ismételt tömegméréssel határoztuk meg egy tárgy tömegét. A 4 mérésből álló minta számtani középértéke 5,0125 g. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a mérés varianciája $\sigma^2 = 10^{-4} \text{ g}^2$. El kell döntenünk, hihető-e, hogy a várható érték (a tárgy valódi tömege) 5,0000 g.

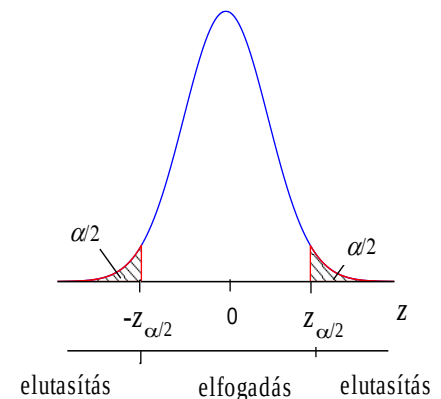
$$H_0 : \mu = \mu_0 = 5,0000$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 = 5,0000$$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 2,5$$

$$\text{ha } \alpha=0,05 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \longrightarrow \text{Döntés?}$$

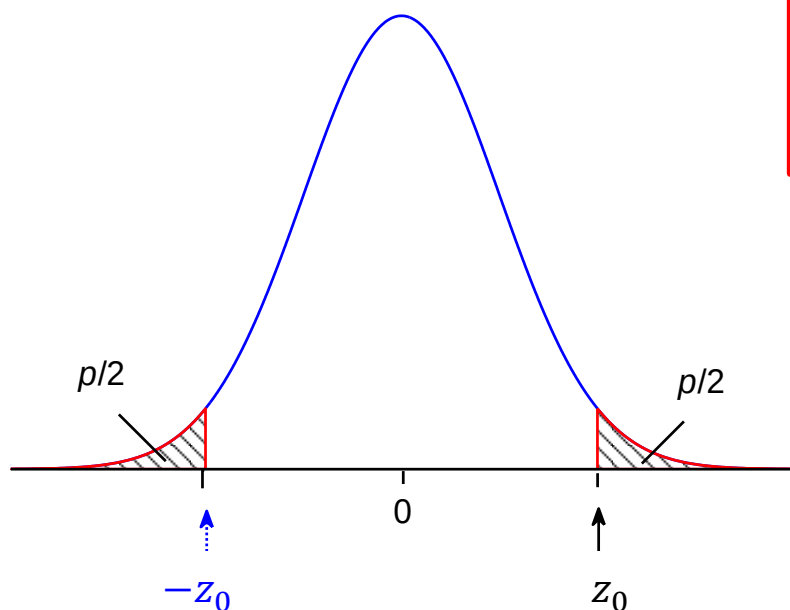
$$\text{ha } \alpha=0,01 \longrightarrow z_{\alpha/2} = 2,58 \longrightarrow \text{És itt?}$$



Döntés a statisztikai programokkal: **p-érték**

A statisztikai programcsomagok z_0 -hoz egy ún. p értékét számolnak.

Pl. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ esetén



p annak valószínűsége,

- hogy a próbastatisztika a kapott vagy még szélsőségesebb értéket vegyen fel
- hogy a kapott vagy még szélsőségesebb adatok adódjanak, ha H_0 igaz:

$$p = 1 - P(-z_0 < z \leq z_0) = 2P(z > |z_0|)$$

Az 1. példában:

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(-2,5 < z \leq 2,5) = 2P(z > 2,5) = \\ &= 2 * (1 - 0,99379) = 0,01242 \end{aligned}$$

Döntés: ha $p > \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist

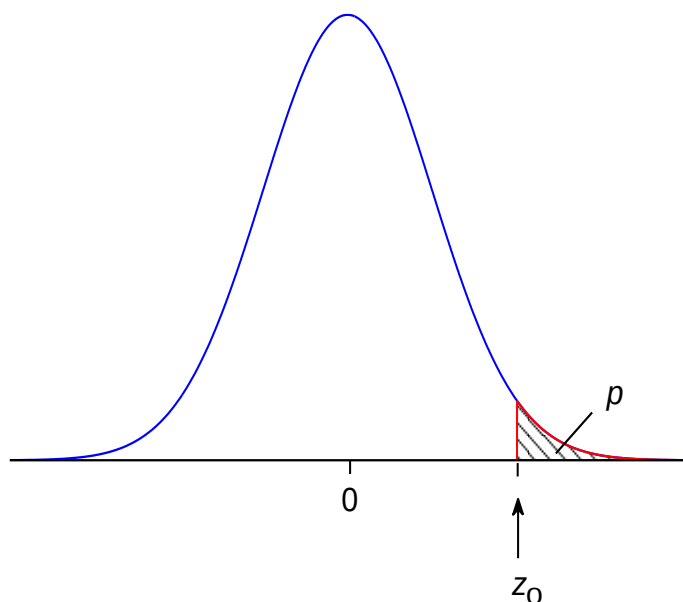
Döntés a statisztikai programokkal: ***p*-érték**

A statisztikai programcsomagok z_0 -hoz egy ún. p értékét számolnak.

Pl. $H_1 : \mu > \mu_0$ esetén

$$p = P(z > z_0)$$

ha $p > \alpha$, elfogadjuk a nullhipotézist



***p* érték értelmezése**

Amit szeretnénk: $P(H_0 | \text{adatok}) = ?$

Ami kiszámítható: $P(\text{adatok} | H_0) = ?$

Statisztikai próba és konfidencia-intervallum kapcsolata

$$P(-z_{\alpha/2} < z_0 \leq z_{\alpha/2} | H_0) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} | H_0\right) = 1 - \alpha$$

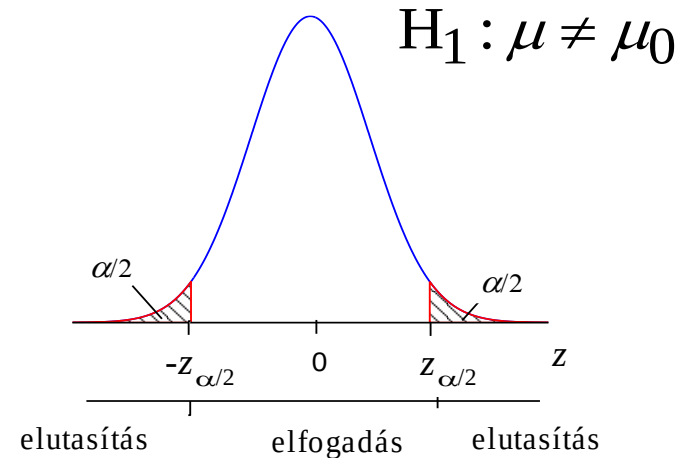
$$\bar{x} - (+z_{\alpha/2})\sigma / \sqrt{n}$$

$$\bar{x} - (-z_{\alpha/2})\sigma / \sqrt{n}$$

$$P(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} \leq \mu_0 < \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

→ Akkor fogadjuk el a nullhipotézist, ha a számított konfidencia-intervallum tartalmazza μ_0 értékét.



elfogadási tartomány határai

konfidencia-intervallum határai

Első- és másodfajú hiba

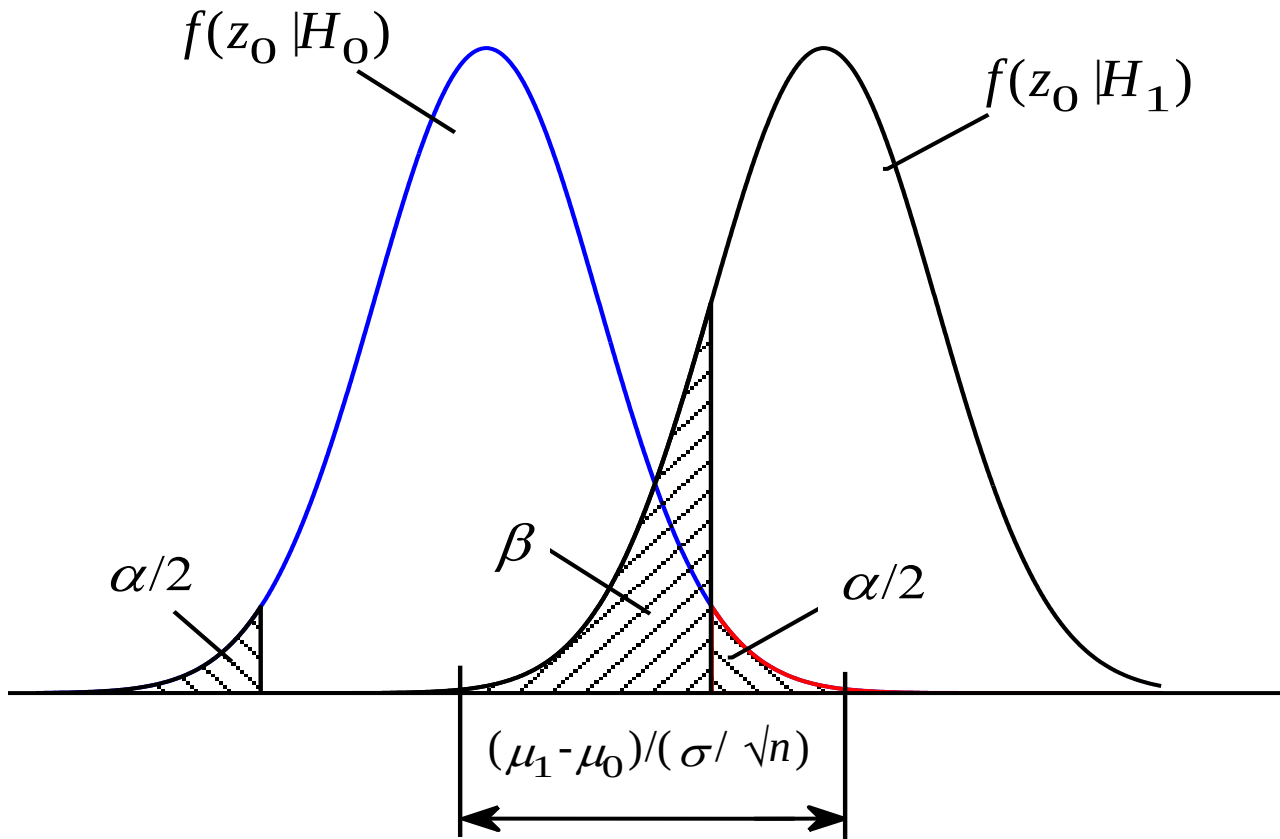
a H_0 nullhipotézis	döntés: a H_0 hipotézist	
	elfogadjuk	elutasítjuk
igaz	helyes döntés	elsőfajú hiba (α)
nem igaz	másodfajú hiba (β)	helyes döntés

Elsőfajú hiba valószínűsége előzetesen ismert (mi adjuk meg, önkényesen),
de a másodfajú hiba valószínűsége nem!

Mit jelent H_0 elfogadása?: rendelkezésre álló adatok alapján nem tudjuk H_0 -t
elutasítani (“fail to reject”)

A másodfajú hiba valószínűsége

Mitől és hogyan függ?:



- Elsőfajú hiba valószínűségétől (α)
- Kimutatandó különbségtől ($\Delta = \mu_1 - \mu_0$)
- Varianciától (σ^2)
- Mintaelem-számtól (n)

2. példa

Számítsuk ki a másodfajú hiba valószínűségét az 1. példára!

Legyen a szignifikanciaszint (α) és kimutatni kívánt különbség (Δ) is 0,01!

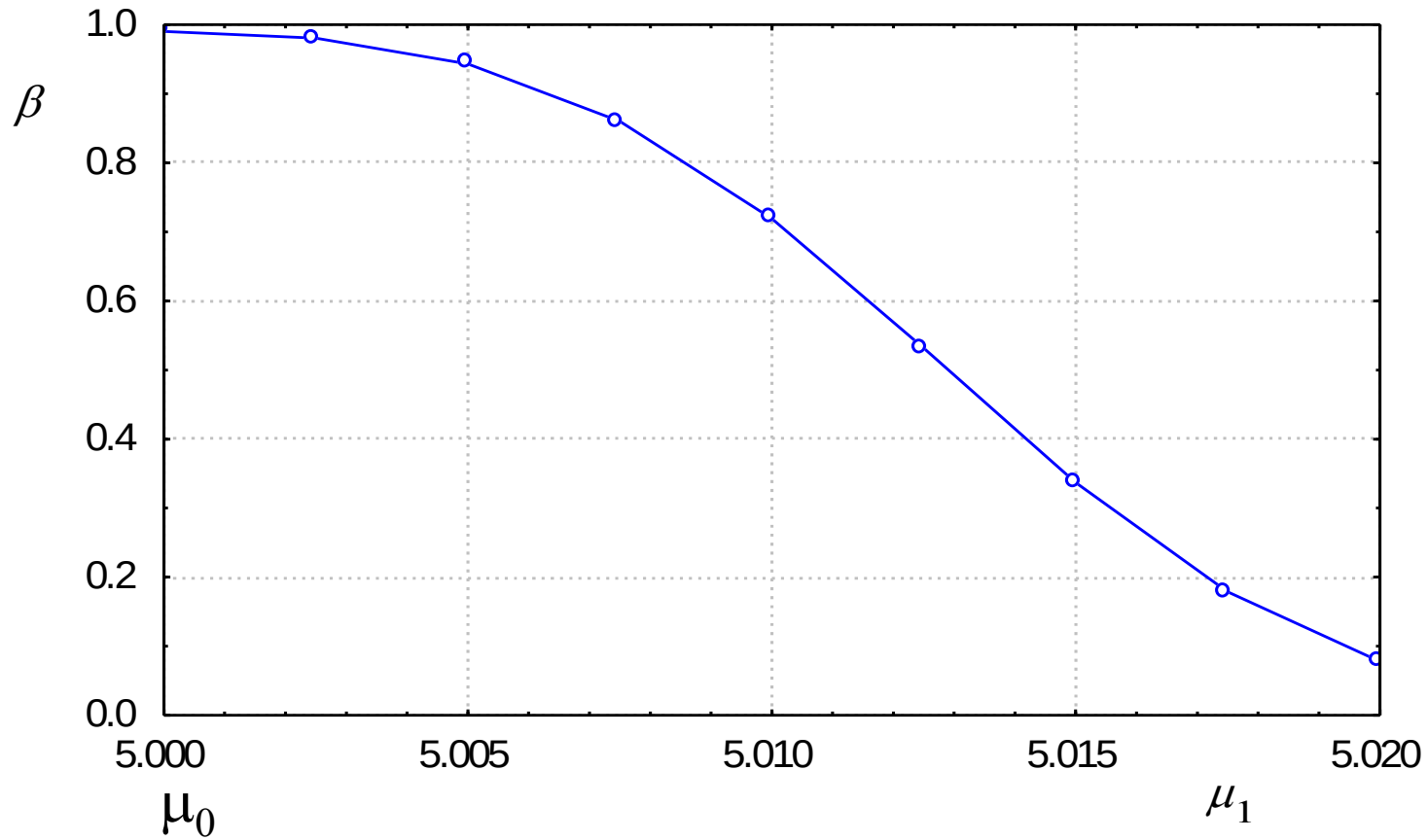
$$H_0 : \mu = \mu_0 = 5,00$$

$$H_1 : \mu = \mu_1 = 5,01 \quad \rightarrow \text{Egy konkrét ellenhipotézishez számolunk!}$$

$$\begin{aligned}\beta &= P(-z_{\alpha/2} < z_0 < z_{\alpha/2} | H_1) = P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{\alpha/2} \mid \mu = \mu_1\right) = \\ &= P\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < z < z_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) = P\left(-2,58 - \frac{0,01}{0,01/\sqrt{4}} < z < 2,58 - \frac{0,01}{0,01/\sqrt{4}}\right) = \\ &= P(-4,58 < z < 0,58) = 0,71904 \\ &\quad \rightarrow \text{Értelmezzük az eredményt!}\end{aligned}$$

Működési jelleggörbe (OC-görbe)

ha α , Δ , σ és n ismert $\rightarrow \beta$ számítható



3. példa

Egy anyag minősége egyértelműen jellemezhető a sűrűségével, melynek kívánatos értéke kisebb, mint 1,54.

A gyártás során szerzett eddigi ismeretek szerint a mérés pontosságára jellemző variancia négyzetgyöke $\sigma = 0,03$.

A vizsgálat menete a következő:

n -szer mintát veszünk a minősítendő legyártott tételből, mindegyik minta sűrűségét megmérjük, átlagoljuk. Ha az átlagos sűrűség meghalad egy bizonyos határértéket, az adagot rossznak, ha kisebb nála, jónak minősítjük.

A feladat: határozzuk meg a veendő minták n számát és a határértéket ($\bar{x}^*$).

$\bar{x} \leq \bar{x}^*$ A tétel jó, átvehető

$\bar{x} > \bar{x}^*$ A tétel rossz, nem vehető át

Hogy a jó tételt majdnem mindig elfogadjuk, a rosszakat majdnem mindig elutasítsuk, a következő kívánalmakat adjuk meg:

- ha $\mu \leq 1,50$ 99 % legyen a valószínűsége, hogy jónak minősítsük,
- ha $\mu \geq 1,54$ 98 % legyen a valószínűsége, hogy rossznak minősítsük az adagot.

Összegezve tehát a feladatot:

A nullhipotézis és az ellenhipotézis:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 1,50 \quad (\text{a tétel jó})$$

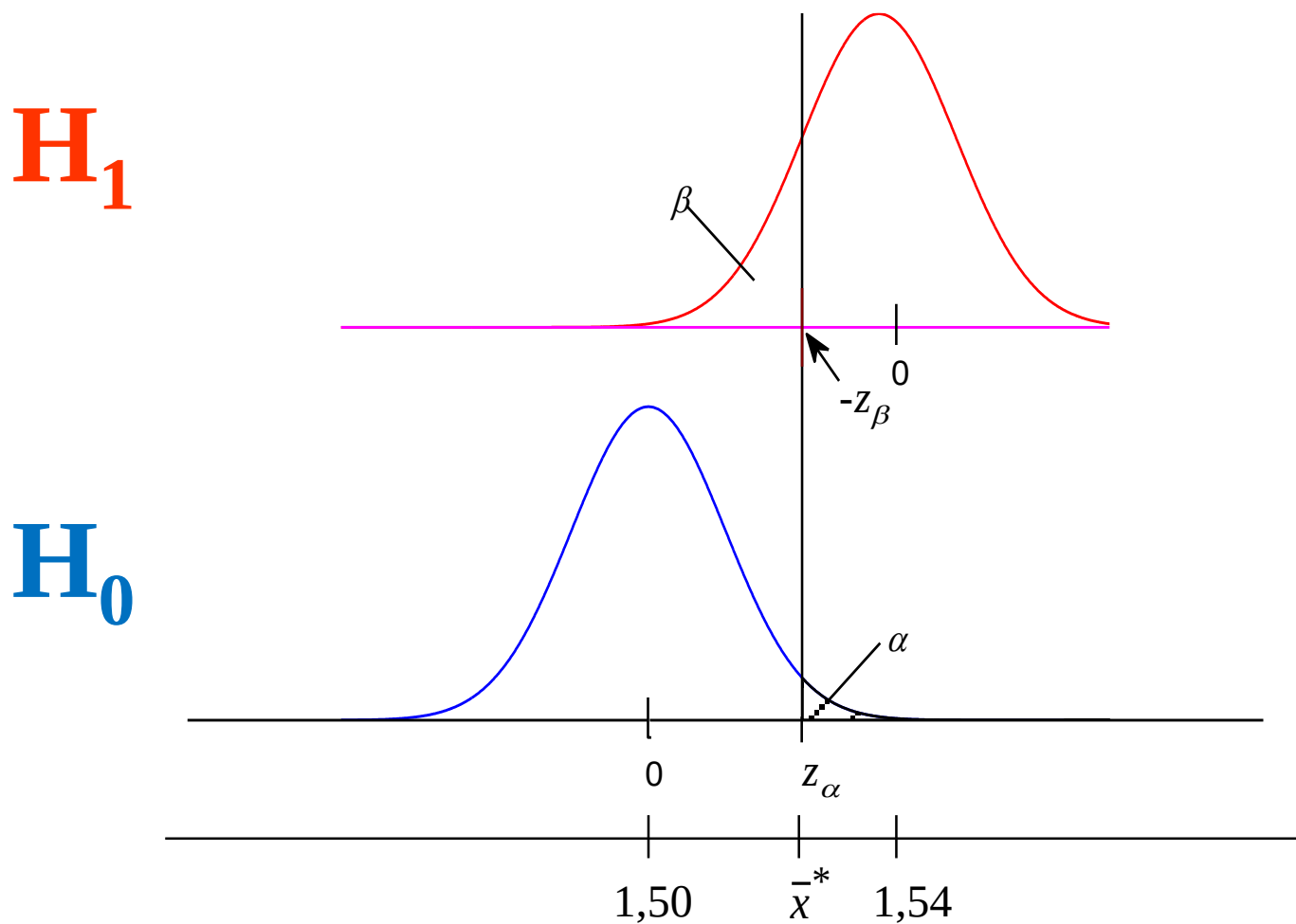
$$H_1 : \mu \geq \mu_1 = 1,54 \quad (\text{a tétel rossz})$$

Az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége: $\alpha = 0,01$

A másodfajú hiba megengedett valószínűsége: $\beta = 0,02$

A kimutatandó, jelentősnek minősítendő különbség: $\Delta = 0,04$

Kritikus értékek az első- és másodfajú hibához

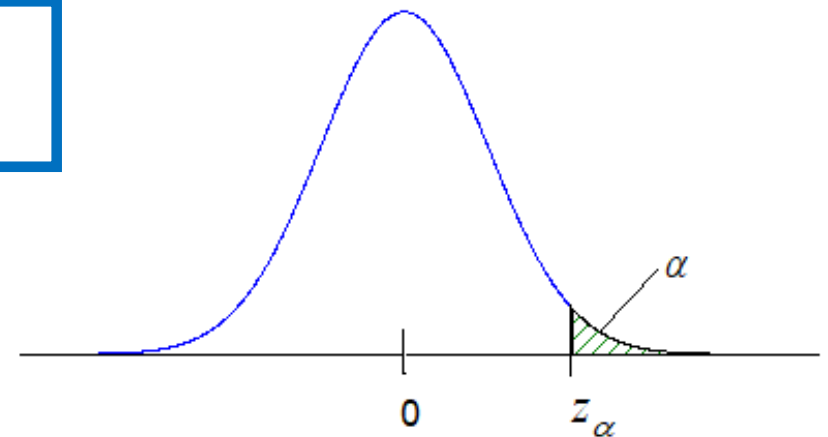


Fejezzük ki azt az $\bar{x}^*$ határt, amelyet $\bar{x}$ $1-\alpha$ valószínűséggel nem halad meg, ha H_0 igaz (az ábra alsó része):

$$P(z_0 \leq z_\alpha | H_0) = 1 - \alpha$$

$$P(z_0 \leq z_\alpha | H_0) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_\alpha | H_0\right) = P\left(\bar{x} \leq \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}\right) = P\left(\bar{x} \leq \bar{x}^* | H_0\right) = 1 - \alpha$$

H_0 $\longrightarrow$ $\boxed{\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \sigma / \sqrt{n}}$



Másodfajú hibát akkor követünk el, ha H_1 az igaz ($\mu \geq \mu_1 = 1,54$), de mi elfogadjuk a H_0 hipotézist (azaz $z_0 \leq z_\alpha$).

Ennek valószínűsége:

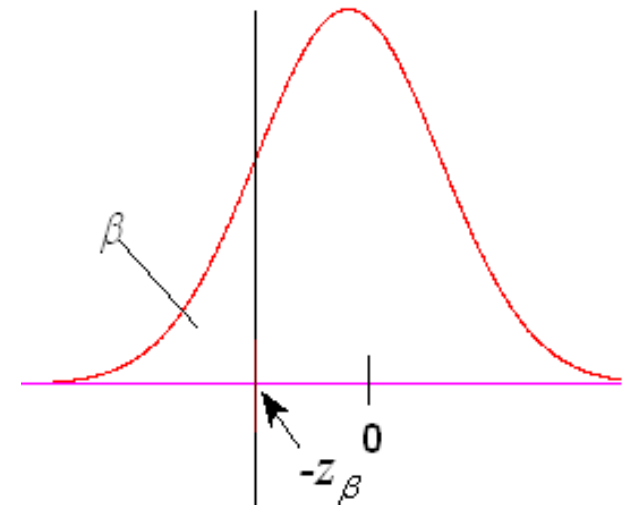
$$\beta = P(z_0 \leq z_\alpha | H_1) = P(\bar{x} \leq \bar{x}^* | H_1) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{x}^* - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_\beta\right)$$

H_1



$$\bar{x}^* = \mu_1 - z_\beta \sigma / \sqrt{n}$$



A két egyenlet jobb oldalát egymással egyenlővé téve,
majd átrendezve:

$$\mu_1 - \mu_0 = (z_\alpha + z_\beta) \sigma / \sqrt{n}$$

Bevezetve a kimutatandó, jelentősnek minősített különbség fogalmát:

$$\Delta = \mu_1 - \mu_0$$

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2} \sigma^2, \quad \text{ill.} \quad n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2}{\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)^2}$$

Esetünkben:

$$z_{\alpha} = 2,326$$

$$z_{\beta} = 2,054$$

$$\Delta = 0,04$$

$$\sigma = 0,03$$

$$n = 10,8 \approx 11$$

$$\bar{x}^* = 1,521$$



➤ azaz itt α , β , Δ és σ volt ismert $\rightarrow n$ számítható

➤ és mivel itt α és β értékét is rögzítettük $\rightarrow$

H_0 elfogadása esetén is tudjuk a hibás döntés valószínűségét

Egyoldali próbák

4. példa

Egy bizonyos vegyszer 1 kg-jában legföljebb 5,0000 g idegen anyag lehet. Négy elemzés eredményének átlagára 5,0125 g-t kaptunk. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a meghatározás varianciája $\sigma^2 = 10^{-4} \text{ g}^2$. Eldöntendő 5%-os szignifikanciaszinten, hogy hihető-e, hogy az elemzési eredmények várható értéke (azaz az igazi idegenanyag-tartalom) nem haladja meg az 5 g-os határt.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 5,0000$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 = 5,0000$$

egyoldali próba!

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = 2,5 \quad \text{próbastatisztika nem változott!}$$

4. példa folytatása

$$H_1 : \mu > \mu_0 = 5,0000$$

Az elfogadási tartomány viszont változik.

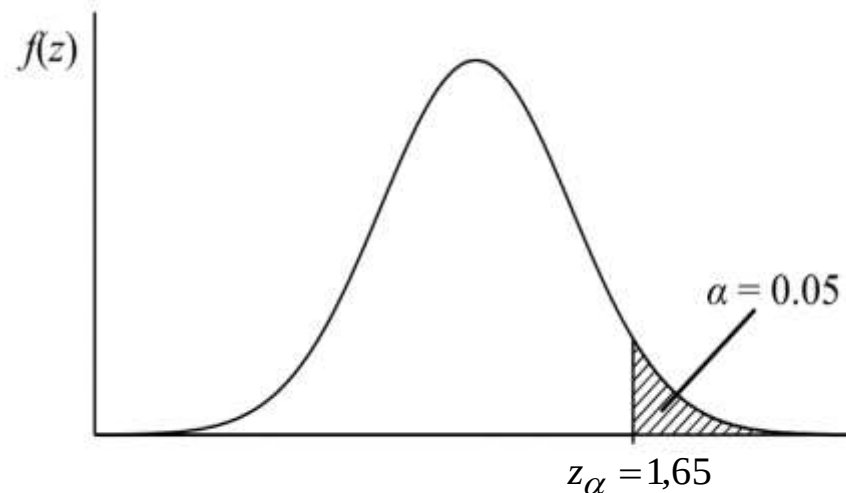
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = z + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leftarrow \text{ha } H_1 \text{ igaz, akkor } > 0$$

→ azaz az elfogadási tartományra felső határ kell

$$P(z_0 > z_\alpha | H_0) = \alpha$$

Döntés:

Mivel most $2,5 = z_0 > z_\alpha = 1,65$
elutasítjuk a nullhipotézist.



Konfidencia-

intervallummal: $5,0125 - 1,65 * 0,01 / \sqrt{4} = 5,0043 < \mu$

A nullhipotézist nem tartalmazza az alulról korlátos konfidencia intervallum!

Egyoldali próbák: Melyik hipotézispárt válasszuk?

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$H'_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H'_1 : \mu < \mu_0$$

Ha elutasítjuk H_0 -t (azaz elfogadtuk H_1 -t), azt mondhatjuk, hogy az adatok α szignifikanciaszinten ellentmondanak annak a feltételezésnek, hogy a várható érték a μ_0 határérték alatt van.

Azaz azt „bizonyítottuk” (mert csak $p \leq \alpha$ a valószínűsége annak, hogy tévedünk), hogy a várható érték μ_0 határérték felett van.

Ha H_0 -t nem tudjuk elutasítani, nem tudunk semmit, mert vagy igaz a nullhipotézis (azaz várható érték a μ_0 határérték alatt van) vagy csak nem volt elég információnk (kis mintaelemszám és/vagy nagy variancia).

Gondoljuk át a fenti két esetet a H'_0 és H'_1 hipotézispárra is!

Tanulság: az ellenhipotézisben legyen, amit bizonyítani akarunk, mert akkor ismerjük a téves elutasítás valószínűségét.

Egyoldali próbák: Melyik hipotézispárt válasszuk?

5. példa

Egy vállalat füstgáz kibocsátásának NO-tartalmát vizsgálják. Adott egy hatósági határérték a maximálisan kibocsátható NO mennyiségre, ezt túllépve a vállalatnak bírságot kell fizetnie.

Melyik hipotézispárt választaná:

- ha Ön a hatóság képviselője lenne és a jogtalan bírságolást kívánja elkerülni?
- ha Ön a vállalat vezérigazgatója lenne és a határérték feletti kibocsátást kívánja elkerülni?

5. példa folytatása

- *Hatóság képviselőjeként:* $H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$

Ha elutasítjuk H_0 -t, azt látjuk „bizonyítva”, hogy a megengedettnél több van benne (azaz jogosan bírságozhat a hatóság).

Ha elfogadjuk H_0 -t, nem bizonyított, hogy a határértéket meghaladja.

- *Vállalat képviselőjeként:* $H'_0 : \mu \geq \mu_0$ $H'_1 : \mu < \mu_0$

Ha elutasítjuk H'_0 -t, azt látjuk „bizonyítva”, hogy a megengedettnél kevesebb van benne (és ez a kibocsátó kötelezettsége).

Ha elfogadjuk H'_0 -t, nem tudjuk bizonyítani, hogy a határérték alatt van.

Egymintás t -próba

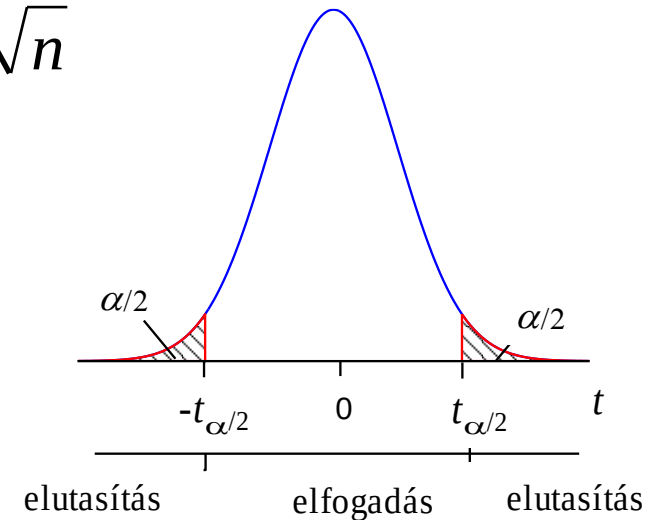
kétoldali eset

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\boxed{t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = t + \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$P\left(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



6. példa

Egy analitikai módszer torzítatlanságának vizsgálatára 5 ismételt mérést végeztek egy 3,25% ismert koncentrációjú munka-standarddel.

Az eredmények: 3,25; 3,27, 3,24; 3,26 és 3,24.

Elfogadva, hogy az adatok közelítőleg normális eloszlásúak, ellenőrizzük 5%-os szignifikanciaszinten a torzítatlanság hipotézisét!

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 3,25$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 = 3,25$$

$$\bar{x} =$$

$$s =$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} =$$

Döntés?

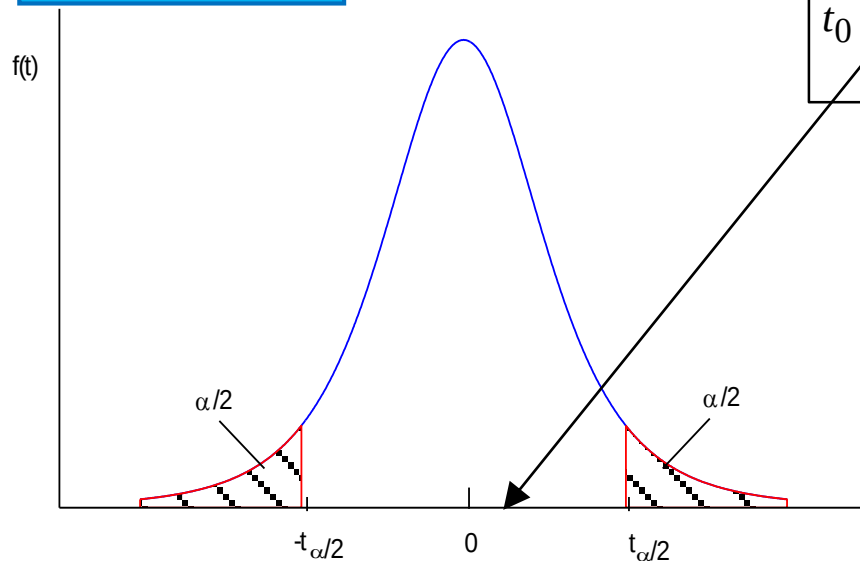
Egymintás *t*-próba: az eredmények értelmezése

Variable	Test of means against reference constant (value) (Test.sta)							
	Mean	Std.Dv.	N	Std.Err.	Reference Constant	t-value	df	p
mert	3.252000	0.013038	5	0.005831	3.250000	0.342997	4	0.748868

Táblázattal

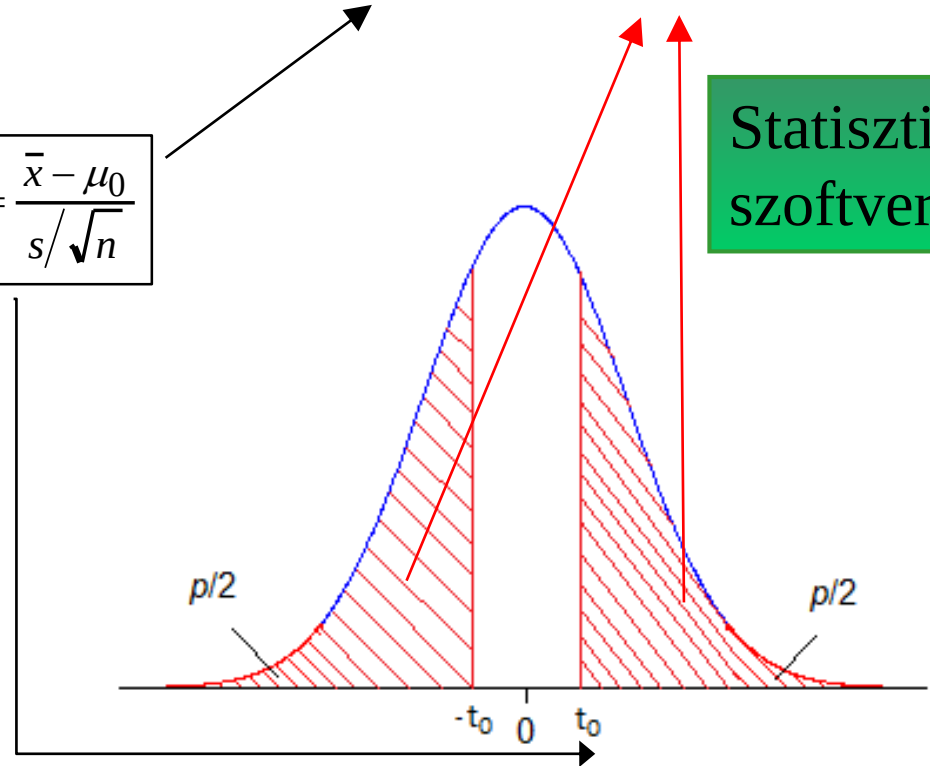
$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Statisztikai szoftverrel



$$t_{0,05/2}(4) = 2,776$$

Hipotézisvizsgálat _ Statisztikai próbák



6. példa folytatása:

Mekkora valószínűséggel tudnák egy adott torzítást kimutatni?

Próba ereje (power) = 1- a másodfajú hiba valószínűsége = $(1-\beta)$,
azaz annak valószínűsége, hogy észreveszem a különbséget

„Emlék”: α , β , Δ és σ és n közül egyik számítható

standardized effect (E_s) = kimutatandó különbség (torzítás) / szigma

Power Calculation (One Mean, t-Test)		H0: $\mu = \mu_0$	
	Value		
Null Hypothesized Mean (μ_0)	3,2500		
True Population Mean (μ)	3,2700	→	
Population S.D. (Sigma)	0,0130	→	
Standardized Effect (E_s)	1,5385	→	
Group Sample Size (N)	5,0000	→	
Type I Error Rate (Alpha)	0,0500	→	
Critical Value of t	2,7764		
Power	0,7311		

Adott:

$$\Delta = \mu_1 - \mu_0 = 3,27 - 3,25 = 0,02$$

σ

$$E_s = \frac{\Delta}{\sigma} = \frac{0,02}{0,013} = 1,54$$

n

α

6. példa folytatása:

Hány elemű mintát kell vennünk, hogy a 0,02-os torzítást 90%-os valószínűséggel kimutassunk?

„Emlék”: α , β , Δ és σ (vagy $Es = \Delta/\sigma$) és n közül egyik számítható

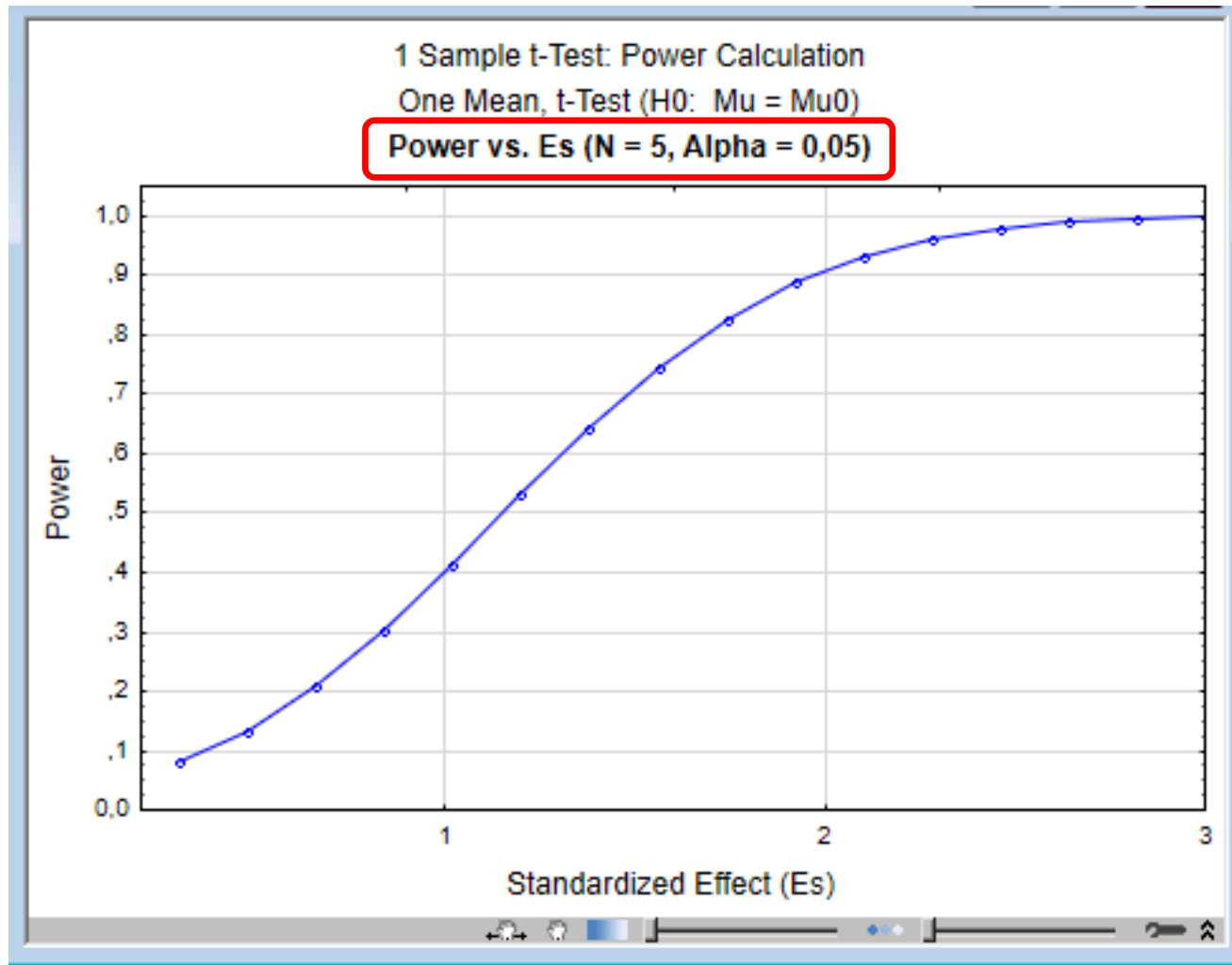
Most adott a próba ereje (power) = $1 - \beta = 0,9$ és $Es = 0,02/0,013 = 1,54$ értéke

Kérdés: n

Sample Size Calculation One Mean, t-Test H0: $\mu = \mu_0$			
	Value		
Null Hypothesized Mean (μ_0)	3,2500		
True Population Mean (μ)	3,2700		
Population S.D. (Sigma)	0,0130		
Standardized Effect (Es)	1,5385		
Type I Error Rate (Alpha)	0,0500		
Power Goal	0,9000		
Actual Power for Required N	0,9204		
Required Sample Size (N)	7,0000		

6. példa folytatása:

Hogyan függ a próba ereje a kimutatandó különbségtől?



7. példa

Egy élővíz szennyezettnek minősül, ha a szennyezőanyag koncentrációja egy adott határérték felett van. A kérdés eldöntésére mintát veszünk az élővízből.

Elvárásunk:

Ha (valóban) szennyezett a víz, azt 95%-os biztonsággal minősítsük is annak.

Kérdés: Hogyan fogalmazzuk meg a vizsgálandó hipotézispárt?

Az elvárásból következik, hogy arra a hibás döntésre, hogy a szennyezett vizet tévesen megfelelőnek minősítsük, 5%-os valószínűséget engedünk.

Ezt rögzítjük tehát az elsőfajú hiba valószínűségének.

Ennek pedig az alábbi hipotézispár felel meg:

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

χ^2 -próba a variancia vizsgálatára

kétoldali eset

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

egyoldali eset

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Ha H_0 igaz, akkor a következő kifejezés χ^2 -eloszlású,
szabadsági foka: $\nu = n - 1$

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}$$

Elfogadási tartományok a két esetben:

$$P\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 < \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \leq \chi_{\alpha}^2\right) = 1 - \alpha$$

8. példa

Egy termék gyártása során a variancia legfeljebb 14 lehet.

11 elemű mintát véve a szórásnégyzet 24-nek adódott.

- a) Elfogadjuk-e 5%-os szignifikanciaszinten azt a feltételezést, hogy a variancia nem nagyobb, mint 14?
- b) Bizonyítottuk ezzel azt az állítást, hogy a variancia 14 alatt van?

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 14$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 14$$

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} =$$

Döntés?

$$\chi_\alpha^2 =$$

Két szórásnégyzet összehasonlítása (F -próba)

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Próbastatisztika:

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

Szabadsági fokok:

$$\nu_1, \nu_2 = n_1 - 1, n_2 - 1$$

Akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha/2} \quad \text{vagy} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{\alpha/2}$$

Megjegyzés:

Ha $s_1^2 / s_2^2 \geq 1$ elég az elfogadási tartomány felső határát ellenőrizni!

Kétmintás t -próba

Adott a két független minta.

Elemszámuk (n_1 és n_2), és szórásnégyzetük (s_1^2 és s_2^2).

A próba két sokaság várható értékének egyezőségét vizsgálja.

Nullhipotézis: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Tételezzük fel, hogy a két sokaság varianciája megegyezik.
(Ezt F -próbával ellenőrizni kell!)

Kétmintás t -próba (folytatás)

Legyen: $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

$$E(d) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{Var}(d) = \text{Var}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

$$s_d^2 = s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \quad \text{ahol} \quad s^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

az ún. egyesített szórásnégyzet

A következő kifejezés t -eloszlású:

$$t = \frac{d - E(d)}{s_d} = \frac{d - E(d)}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

Kétmintás t -próba (folytatás)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{ekkor: } E(d) = 0$$

A próbastatisztika:

$$t_0 = \frac{d - 0}{s_d} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

Előtte a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ feltevést F -próbával ellenőrizni kell!

Welch-próba: két minta várható értékének összehasonlítására, ha a két minta mögött álló sokaság varianciája nem egyezik meg

9. példa

Két laborban végezzük el ugyanazt a mérést adott mérési leírat szerint.

- a) Eldöntendő 10%-os szignifikanciaszinten, hogy megegyezik-e a két laborban a mérési hibák varianciája?
- b) Eldöntendő 5%-os szignifikanciaszinten, hogy megegyezik-e a két laborban a mérések várható értéke?

	1 Labor 1	2 Labor 2
1	51,2	47,6
2	54,5	49,3
3	52,7	51,3
4	56,8	50,1
5		52,2

$$n_1 = 4$$

$$n_2 = 5$$

$$\bar{x}_1 = 53,8$$

$$\bar{x}_2 = 50,1$$

$$s_1^2 = 5,8$$

$$s_2^2 = 3,2$$

a) F -próba

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{5,8}{3,2} = 1,81$$

$$F_{felső} = F_{0,05}(3,4) = 6,59$$

$$F_{alsó} = F_{0,95}(3,4) = \frac{1}{F_{0,05}(4,3)} = \frac{1}{9,12} = 0,11$$

Döntés?

b) kétmintás t -próba

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{53,8 - 50,1}{\sqrt{4,31 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)}} = 2,66$$

$$s^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{5,8 \cdot 3 + 3,2 \cdot 4}{4 + 5 - 2} = 4,31$$

$$t_{\alpha/2}(\nu = 7) = 2,365$$

Döntés?

10. példa

Cipőtalp anyagának kopásállóságát vizsgálták.

Ehhez kiválasztottak véletlenszerűen 10-10 fiút, akik egy héten át viselték az a „A” ill. „B” anyagból készült cipőket.

Vizsgáljuk meg 5%-os szignifikanciaszinten, hogy van-e különbség a cipőtalpak átlagos kopásában!

A két minta statisztikái:

	n	átlag	szórás
A	10	10,63	2,45
B	10	11,04	2,52

Kétmintás t -próba, ELŐTTE F -próba!

$$H_0:$$

$$F_0 =$$

$$F_{0.05}(\nu_1, \nu_2) =$$

$$\nu_1 =$$

$$\nu_2 =$$

$$H_0:$$

$$t_0 =$$

$$t_{0.05}(\nu) =$$

$$\nu =$$

10. példa megoldása Statistica szoftverrel: az eredmények értelmezése

Statistics > Basic Statistics/Tables > t-test, independent, by variables

Kétmintás t -próba

F -próba

		T-test for Independent Samples (fiucipo) Note: Variables were treated as independent samples										
Group 1 vs. Group 2		Mean Group 1	Mean Group 2	t-value	df	p	Valid N Group 1	Valid N Group 2	Std.Dev. Group 1	Std.Dev. Group 2	F-ratio Variances	p Variances
TALPA vs.	TALPB	10,63000	11,04000	-0,36891	18	0,71649	10	10	2,45132	2,51846	1,05552	0,93716

próbastatisztikák: t_0

F_0

Döntés a p -érték alapján!

11. példa (10. példa módosítva)

Cipőtalp anyagának kopásállóságát vizsgálták.

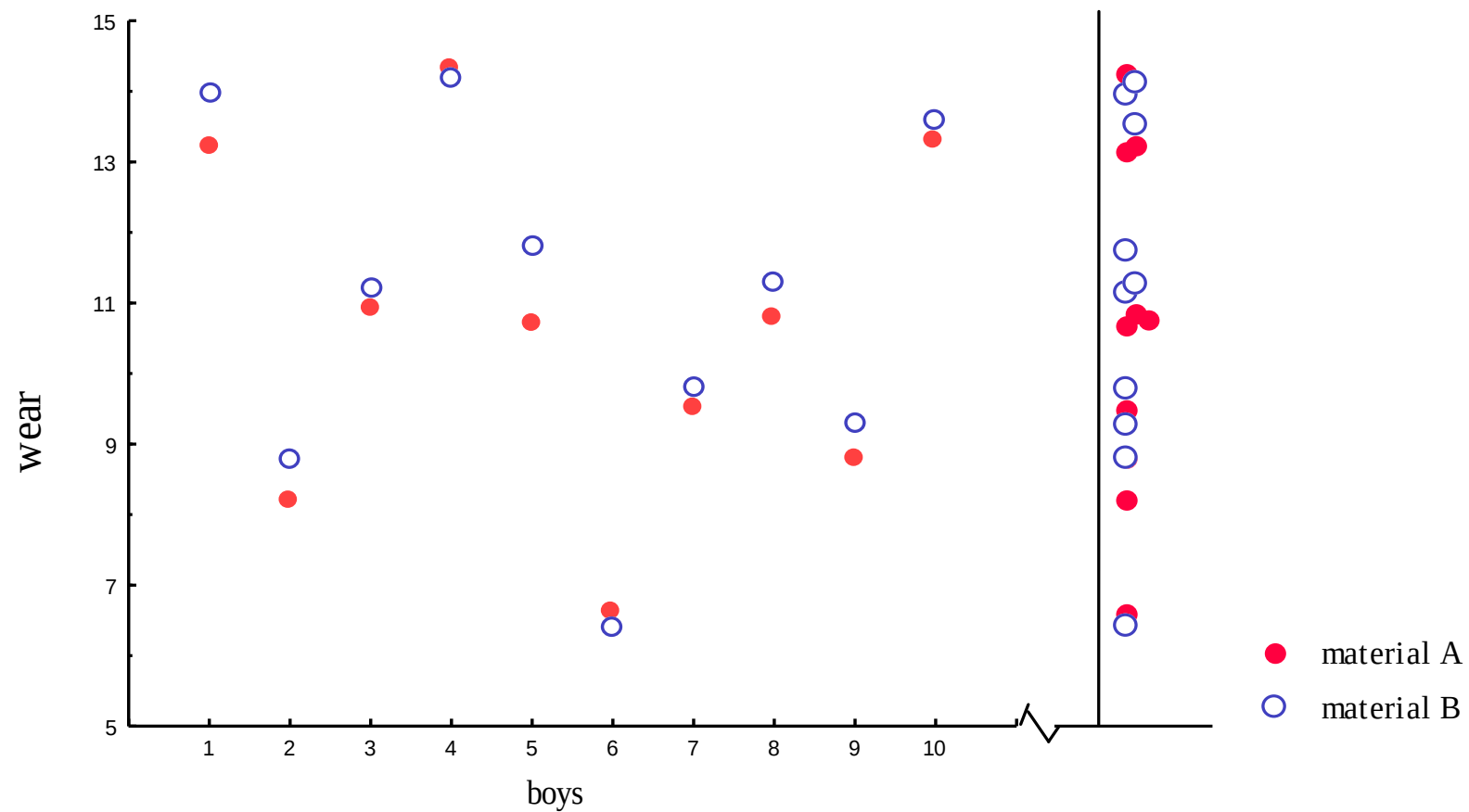
A kísérlethez most 10 fiút választottak ki véletlenszerűen, majd mindegyikükönél kisorsolták, hogy melyik lábukon melyik cipőtalp-anyagból készült cipőt viselik.

Vizsgáljuk meg 5%-os szignifikanciaszinten, hogy van-e különbség a cipőtalpak átlagos kopásában!

Fiúcipő példa adatai

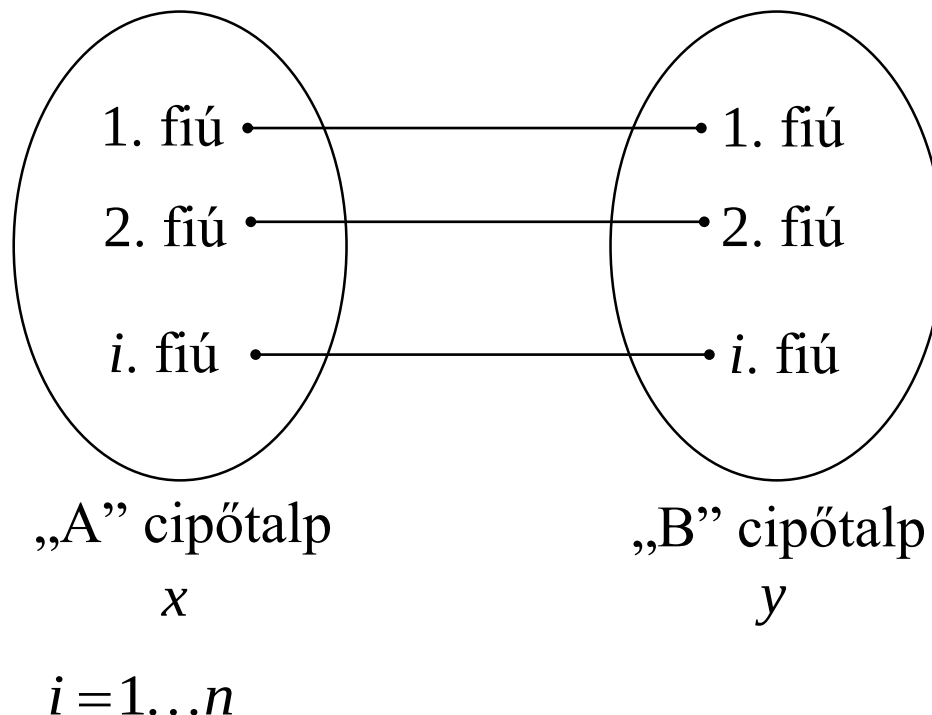
TABLE 4.3. Data on the amount of wear measured with two different materials A and B, boy's shoes example*

boy	material A	material B	B – A difference d
1	13.2(L)	14.0(R)	0.8
2	8.2(L)	8.8(R)	0.6
3	10.9(R)	11.2(L)	0.3
4	14.3(L)	14.2(R)	-0.1
5	10.7(R)	11.8(L)	1.1
6	6.6(L)	6.4(R)	-0.2
7	9.5(L)	9.8(R)	0.3
8	10.8(L)	11.3(R)	0.5
9	8.8(R)	9.3(L)	0.5
10	13.3(L)	13.6(R)	0.3



Páros t -próba

Két **összefüggő** (nem független) minta összehasonlítására.



$$d_i = y_i - x_i$$

$$E(d_i) = E(y_i) - E(x_i)$$

$$H_0 : E(y_i) = E(x_i)$$

$$H_0 : E(d_i) = 0$$

Páros t -próba (folytatás)

A páronkénti eltérés átlagértéke: $\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$

$$d_i = y_i - x_i$$

szórásnégyzete: $s_d^2 = \frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}$

A következő kifejezés t -eloszlású: $t = \frac{\bar{d} - E(\bar{d})}{s_d / \sqrt{n}}$

A próbastatisztika: $t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$

11. példa folytatása

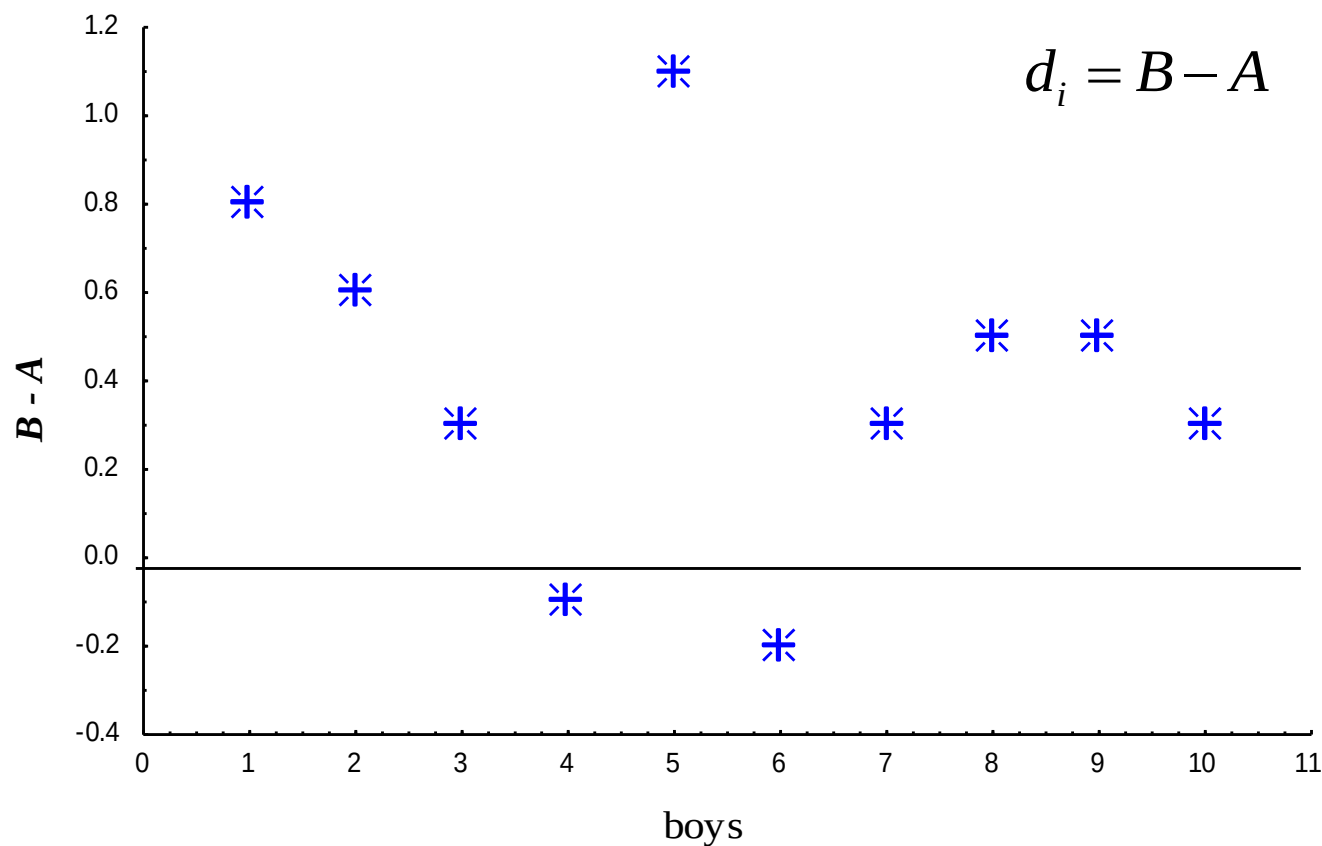
$$\bar{d} = 0,41$$

$$s_d = 0,3872$$

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{0,41}{0,3872 / \sqrt{10}} = 3,349$$

$$t_{\alpha/2}(\nu = 9) = 2,262$$

Döntés?



11. példa megoldása Statistica szoftverrel: az eredmények értelmezése

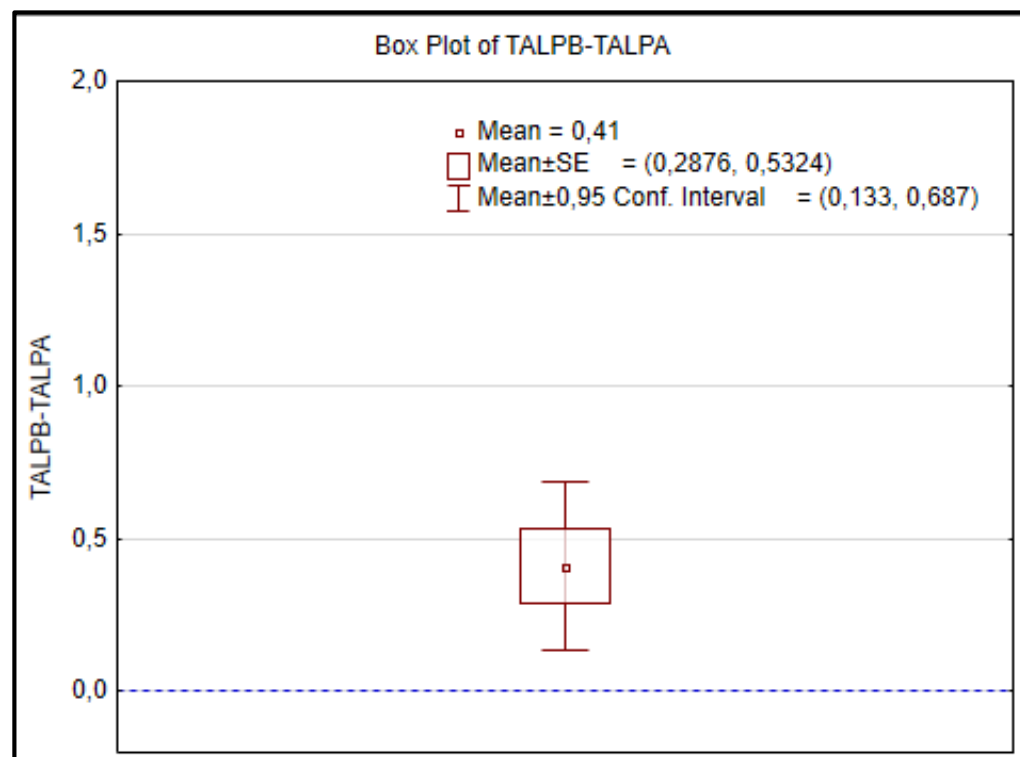
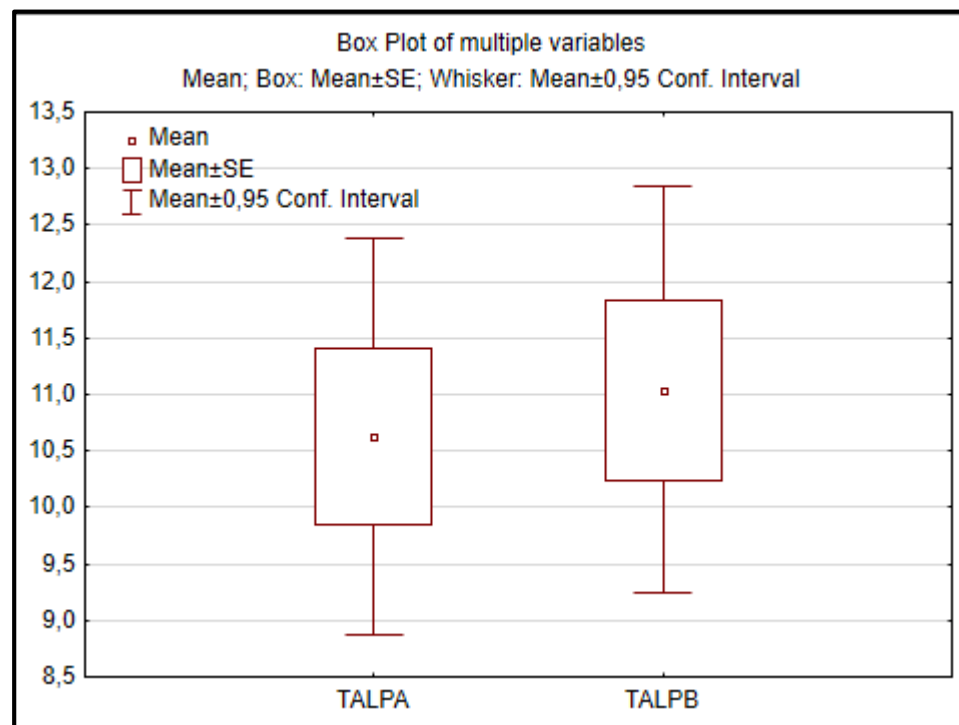
Statistics > Basic Statistics/Tables > t-test, dependent samples

T-test for Dependent Samples (fiucipo) Marked differences are significant at p < ,05000										
Variable	Mean	Std.Dv.	N	Diff.	Std.Dv. Diff.	t	df	p	Confidence -95,000%	Confidence +95,000%
TALPA	10,6300	2,4513								
TALPB	11,0400	2,5185	10	-0,4100	0,3872	-3,3489	9	0,00854	-0,6870	-0,1330

t_0

p -érték

Döntés?



OC görbe a fiúcipő példához

