

# Véletlen blokk

## Egy rögzített, egy véletlen (blokk) faktor szerinti keresztosztályozás

### **Blokk:**

az egész kísérletsorozatra nem biztosíthatók egyforma körülmények, a blokkra azonban igen

*A blokkokra osztás célja:* A körülmények különbözőségének hatásától elkülönítsük a vizsgálni kívánt faktor hatását.

### *Például:*

- idő (időjárás)
- személyzet
- készülék
- nyersanyag

## 6. példa

Penicillin gyártása, 4 technológiát kívánnak összehasonlítani.

Összesen 20 fermentációra van erőforrásunk (pénz, idő stb).

A fermentáció nyersanyagként szolgáló kukoricalekvár hordókban áll rendelkezésre, egy hordó 4 fermentációhoz elegendő.

Aggódnak, hogy a kukorica-lekvár hordók minősége különböző.

(Box-Hunter-Hunter: Statistics for Experimenters, J. Wiley, 1978, p. 209)

- Miért jelenthet problémát a feladat utolsó mondata?
- Milyen megoldással élhetünk a kiküszöbölésére?
- Hogyan szerveznék meg a kísérleteket?
- Milyen modellel értékelnék ki az eredményeket?

## 6. példa egy lehetséges kísérleti elrendezése

**Teljes randomizálással** végezzük el a kísérleteket, azaz bármelyik technológia bármelyik kukoricaekvérral, kisorsolva.

technológia			
1	2	3	4
89 <sup>(1)</sup>	88 <sup>(5)</sup>	97 <sup>(2)</sup>	94 <sup>(3)</sup>
84 <sup>(3)</sup>	77 <sup>(4)</sup>	92 <sup>(1)</sup>	79 <sup>(5)</sup>
81 <sup>(4)</sup>	87 <sup>(2)</sup>	87 <sup>(5)</sup>	85 <sup>(1)</sup>
87 <sup>(1)</sup>	92 <sup>(3)</sup>	89 <sup>(4)</sup>	84 <sup>(5)</sup>
79 <sup>(2)</sup>	81 <sup>(4)</sup>	80 <sup>(3)</sup>	88 <sup>(2)</sup>

(kukoricaekvár hordójának száma)

# Az előző dián lévő kísérleti elrendezés modellje

## egyfaktoros ANOVA modell

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon'_{ij}$$

$$j = 1, \dots, q \quad q = 5$$

↑  
technológia  
(rögzített faktor)

$$i = 1, \dots, r \quad r = 4$$

### Kísérleti hiba:

Benne van a kukoricaekvár hatása is!  
Azaz annak hibája, ha ugyanazzal a technológiával, de bármelyik másik kukoricaekvárral új fermentációt végzünk.

Univariate Tests of Significance for kiterm (PENICILL_simula.sta)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition; Std. Error of Estimate: 5.533985					
Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	147920.0	1	147920.0	4830.041	0.000000
technol	70.0	3	23.3	0.762	0.531783
Error	490.0	16	30.6		

Miért baj, hogy nagy az error szórásnégyzet?

## 6. példa másik lehetséges kísérleti elrendezése

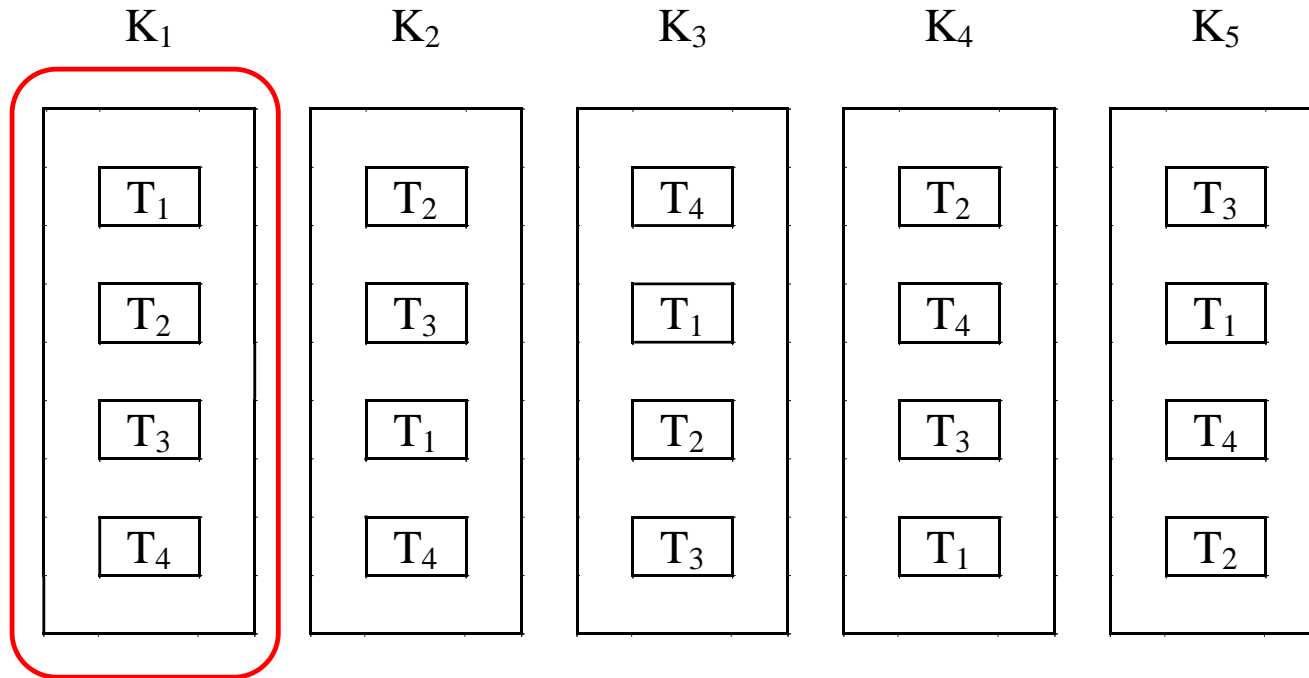
- Hogyan tudnánk még jobban kiszűrni a kukoricalekvár esetleges torzító hatását?
- Hogyan szerveznék meg ekkor a kísérleteket?
- Milyen modellel értékelnék ki ebben az esetben az eredményeket?

kuk. lekvár	technológia				$y_{.j}$
	1	2	3	4	
1	89	88	97	94	92
2	84	77	92	79	83
3	81	87	87	85	85
4	87	92	89	84	88
5	79	81	80	88	82
$y_{i.}$	84	85	89	86	$y_{..} = 86$

nincs ismétlés!

# A véletlen blokk elrendezés sémája a 6. példán bemutatva

5 kukoricaekvár, 4 technológia esetén:



**Egy blokk,**  
melyen belül a körülmények  
(itt: kuk.lekvár) azonosak

**Csak a blokkon belül  
randomizálunk!**

## A véletlen blokk kísérleti elrendezés modellje

Egy rögzített, egy véletlen faktor szerinti keresztosztályozás

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)} \quad \begin{array}{ll} i = 1, \dots, r & r = 4 \\ j = 1, \dots, q & q = 5 \\ k = 1, \dots, p & p = 1 \end{array}$$

↑                      ↑  
technológia      kukoricafehér

$H_0^A : \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, r$       Különbözik az egyes technológiákkal elérhető kitermelés?

$H_0^B : \sigma_B^2 = 0$       Megnöveli a kukoricafehér-adagok közötti különbség a kitermelés ingadozását?

$H_0^{AB} : \sigma_{AB}^2 = 0$       Van kölcsönhatás közöttük?

**Kölcsönhatást véletlen jellegűnek tekintjük!**

# A véletlen blokk elrendezés ANOVA-táblázata

az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szabadsági fokszám	szórásnégyzet	szórásnégyzet várható értéke	$F$
A hatása rögzített	$S_A = qp \sum_i (y_{i..} - y_{...})^2$	$r-1$	$s_A^2 = \frac{S_A}{r-1}$	$qpQ[A] + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$S_A^2 / S_{AB}^2$
B hatása véletlen	$S_B = rp \sum_j (y_{.j.} - y_{...})^2$	$q-1$	$s_B^2 = \frac{S_B}{q-1}$	$pr\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$S_B^2 / S_{AB}^2$
AB kölcs.	$S_{AB} = p \sum_i \sum_j (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2$	$(r-1)(q-1)$	$s_{AB}^2 = \frac{S_{AB}}{(r-1)(q-1)}$	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$S_{AB}^2 / S_R^2$
Ismétlések	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - y_{ij.})^2$	$rq(p-1)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{rq(p-1)}$	$\sigma_e^2$	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j (y_{ij.} - y_{...})^2$	$rqp-1$			

A példában:  $p=1$ ,  $v_{ism}=0$

$$Q[A] = \frac{\sum_i^r \alpha_i^2}{r-1}$$



## A 6. példa véletlen blokk ANOVA-táblázata:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)} \quad \text{keresztosztályozás, nincs ismétlés}$$

Univariate Tests of Significance for kiterm (Penicill)								
Over-parameterized model								
Type III decomposition								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	147920.0	1	147920.0	4	66.00000	2241.212	0.000001
kukl	Random	264.0	4	66.0	12	18.83333	3.504	0.040746
technol	Fixed	70.0	3	23.3	12	18.83333	1.239	0.338658
kukl*technol	Random	226.0	12	18.8	0	0.00000		
Error			0					

**Main effects ANOVA:** csak a fő (faktorok) hatását vizsgálja,

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \quad \text{nincs kölcsönhatás-tag a modellben}$$

Univariate Tests of Significance for kiterm (Penicill)								
Over-parameterized model								
Type III decomposition								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	147920.0	1	147920.0	4	66.00000	2241.212	0.000001
kukl	Random	264.0	4	66.0	12	18.83333	3.504	0.040746
technol	Fixed	70.0	3	23.3	12	18.83333	1.239	0.338658
Error		226.0	12	18.8				

## A 6. példa eredményeinek értelmezése

Univariate Tests of Significance for kiterm (Penicill)								
Over-parameterized model								
Type III decomposition								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	147920.0	1	147920.0	4	66.00000	2241.212	0.000001
kukl	Random	264.0	4	66.0	12	18.83333	3.504	0.040746
technol	Fixed	70.0	3	23.3	12	18.83333	1.239	0.338658
kukl*technol	Random	226.0	12	18.8	0	0.00000		
Error			0					

Az eltérés forrása	E(MS)
A (technológia)	$qp\Phi(A) + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
B (kuk. lekvár)	$pr\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
AB	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
ismétlés (maradék)	$\sigma_e^2$
teljes	

Components of Variance (Penicill)		
Over-parameterized model		
Type III decomposition		
Effect	kiterm	
kukl	11.79167	
kukl*technol	18.83333	← ?
Error	0.00000	← ?

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{s_B^2 - s_{AB}^2}{pr} = \frac{66 - 18.833}{4} = 11.8$$

## A két modell összehasonlítása

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{k(ij)}$$

technológia

kukorica-  
lekvár

**véletlen blokk**

ha ugyanazzal a technológiával,  
ugyanazzal a kuk. lekvárral még  
egyet fermentálunk

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon'_{ij}$$

technológia

**egyfaktoros ANOVA**

benne van a kukoricalekvár hatása is:  
ha ugyanazzal a technológiával, de  
bármelyik másik kukoricalekvárral újat  
fermentálunk

## A két modell hibatagjának összehasonlítása

$$\varepsilon'_{ij} = \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

ha ugyanazzal a technológiával, de bármelyik kukoricelekvárral újat fermentálunk

kuk.lekvár  
hatása

ha ugyanazzal a technológiával, ugyanazzal  
a kuk. lekvárral még egyet fermentálunk

$$Var(\varepsilon'_{ij}) = Var(\beta_j) + Var(\varepsilon_{ij})$$

# A két modell ANOVA táblázatának összehasonlítása

## véletlen blokk

Univariate Tests of Significance for kiterm (PENICILL_simula.sta)								
Over-parameterized model								
Type III decomposition; Std. Error of Estimate: 4.339738								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	147920.0	1	147920.0	4	66.00000	2241.212	0.000001
kukl	Random	264.0	4	66.0	12	18.83333	3.504	0.040746
technol	Fixed	70.0	3	23.3	12	18.83333	1.239	0.338658
Error		226.0	12	18.8				

## egy faktor szerinti ANOVA

Univariate Tests of Significance for kiterm (PENICILL_simula.sta)					
Sigma-restricted parameterization					
Effective hypothesis decomposition; Std. Error of Estimate: 5.533985					
Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	147920.0	1	147920.0	4830.041	0.000000
technol	70.0	3	23.3	0.762	0.531783
Error	490.0	16	30.6		

df és MS is nagyobb,  
a próba (a hatás kimutatásának) ereje kisebb

# Latin négyzet

**Egy rögzített és két véletlen (blokk) faktor  
szerinti keresztosztályozás**

## 7. példa

Négy benzin-adalékot hasonlítanak össze szennyezés-kibocsátás szempontjából. Gondolni kell az autók és vezetők esetleges különbözőségére is (blokk-faktorok).

(Box-Hunter-Hunter: Statistics for Experimenters, J. Wiley, 1978, p. 245)

		autó			
		I	II	III	IV
vezető	1	A (15)	B (19)	C (25)	D (15)
	2	B (25)	A (12)	D (13)	C (16)
	3	C (21)	D (13)	A (13)	B (25)
	4	D (10)	C (15)	B (18)	A (1)

vezető: 1,...,4

autó: I,...,IV

adalék: A, B, C, D  
rögzített faktor

## Latin négyzet terv modellje

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk} \quad 4^2 \text{ kísérlet}$$

↑
↑
↑  
 adalék            vezető            autó

$i = 1, \dots, r (4)$      $j = 1, \dots, q (4)$      $k = 1, \dots, t (4)$     ismétlés nélkül

		autó			
		I	II	III	IV
vezető	1	A (15)	B (19)	C (25)	D (15)
	2	B (25)	A (12)	D (13)	C (16)
	3	C (21)	D (13)	A (13)	B (25)
	4	D (10)	C (15)	B (18)	A (1)

A teljes modell ilyen lenne:

$4^3$  kísérlet!

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$



Statistics > Industrial Statistics & Six Sigma > Experimental Design >  
> Latin squares ...

Analysis of Variance (Latin) 4 by 4 Latin Square REDUCTIN; Mean = 20.0000 Sigma = 4.44222					
Effect	SS	df	MS	F	p
DRMER	216.0000	3	72.00000	27.00000	0.000699
CAR	24.0000	3	8.00000	3.00000	0.116960
ADDITVE	40.0000	3	13.33333	5.00000	0.045197
Residual	16.0000	6	2.66667		

Statistics > Advanced Linear/Nonlinear Models > General Linear Models >  
> Main effects ANOVA

Options fülön: Random factors: Driver, Car

Univariate Tests of Significance for REDUCTIN (Latin) Over-parameterized model Type III decomposition								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	6400.000	1	6400.000	3.416385	77.33333	82.75862	0.001640
DRIVER	Random	216.000	3	72.000	6.000000	2.66667	27.00000	0.000699
CAR	Random	24.000	3	8.000	6.000000	2.66667	3.00000	0.116960
ADDITVE	Fixed	40.000	3	13.333	6.000000	2.66667	5.00000	0.045197
Error		16.000	6	2.667				

## Modellek összehasonlítása:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

↑  
adalék

↑  
vezető

↑  
autó

Latin négyzet

ha ugyanazzal az adalékkal,  
vezetővel, autóval még egy  
kísérlet lenne

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon'_{ijk}$$

↑  
adalék

egy faktor szerinti ANOVA

ha ugyanazzal az adalékkal,  
de akármelyik vezetővel és  
autóval lenne még egy kísérlet

Univariate Tests of Significance for REDUCTIN (Latin) Over-parameterized model Type III decomposition								
Effect	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den. Syn. Error df	Den. Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	6400.000	1	6400.000	3.416385	77.33333	82.75862	0.001640
DRIVER	Random	216.000	3	72.000	6.000000	2.66667	27.00000	0.000699
CAR	Random	24.000	3	8.000	6.000000	2.66667	3.00000	0.116960
ADDITVE	Fixed	40.000	3	13.333	6.000000	2.66667	5.00000	0.045197
Error		16.000	6	2.667				

Components of Variance (LATIN.STA) Over-parameterized model Type III decomposition	
Effect	REDUCTIN
DRIVER	17.33333
CAR	1.33333
Error	2.66667

Latin négyzet

Egy faktor szerinti ANOVA

Univariate Tests of Significance for REDUCTIN (LATIN.STA) Sigma-restricted parameterization Effective hypothesis decomposition; Std. Error of Estimate: 4.618802					
Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	6400.000	1	6400.000	300.0000	0.000000
ADDITVE	40.000	3	13.333	0.6250	0.612440
Error	256.000	12	21.333		