VARIANCIAANALÍZIS (ANOVA)
Véletlen faktor esetén

Varianciakomponens-elemzés

Rögzített faktorok:

szintjeiket a kísérletekhez megválaszthatjuk és beállíthatjuk

Szakmai kérdés:

van-e különbség a faktor különböző szintjei között, melyik közülük a legjobb?

Véletlen faktor:

szintjeit egy elképzelt sokaságból véletlenszerűen választjuk ki

Szakmai kérdés:

a faktornak van-e hatása az ingadozásra, több véletlen faktor közül melyik milyen mértékben járul hozzá az ingadozáshoz, a jövőben mekkora ingadozás várható?

Egy véletlen faktor szerinti varianciaanalízis

3. példa (Napszem.sta)

Egy elemzést három napon kétszer-kétszer végeztek el.

Okoz-e többletingadozást az, hogy különböző napokon végezték a méréseket?

	1. nap	2. nap	3. nap	
	96.897 96.963	96.905 97.567	97.495 97.195	
$y_{i.}$	96.930	97.236	97.345	$y_{..}$=97.1705

A modell: $y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$

α_i a faktor *i*-edik szintjének (*i*-edik nap) hatása

μ közös érték; r+1 paraméter

rögzített faktornál $\mathrm{H}_0: \alpha_i = 0, \quad i = 1,\ldots,r$

véletlen faktornál $\alpha_i \sim N\left(0, \sigma_A^2\right)$

$E(\alpha) = 0 \qquad Var(\alpha) = \sigma_A^2$

$\mathrm{H}_0: \sigma_A^2 = 0$

$$\sum_i^r p_i \alpha_i \neq 0$$

ANOVA-táblázat egy véletlen faktorra

az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szabadsági fokszám	szórás-négyzet	szórásnégyzet várható értéke	F_0
A hatása (csoportok közötti)	$S_A = p\sum_i \left(y_{i\cdot} - y_{\cdot\cdot}\right)^2$	r-1	$s_A^2 = \dfrac{S_A}{r-1}$	$\sigma_e^2 + p\sigma_A^2$	$\dfrac{s_A^2}{s_R^2}$
Ismétlések (csoportokon belüli)	$S_R = \sum_i \sum_j \left(y_{ij} - y_{i\cdot}\right)^2$	$r(p$-1)	$s_R^2 = \dfrac{S_R}{r(p-1)}$	σ_e^2	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j \left(y_{ij} - y_{\cdot\cdot}\right)^2$	rp-1			

r-1 $\longrightarrow$

$$F = \frac{\dfrac{s_A^2}{\sigma_e^2 + p\sigma_A^2}}{\dfrac{s_R^2}{\sigma_e^2}}$$

$r(p$-1) $\longrightarrow$

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0$$

$$F_0 = \frac{s_A^2}{s_R^2}$$

3. példa ANOVA táblája

Effect	Univariate Tests of Significance for Y (Napszem) Over-parameterized model Type III decomposition Include condition: szem=1							
	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	56652.44	1	56652.442	2.000000	0.092581	611925.190	0.000002
NAP	Random	0.19	2	0.093	3.000000	0.088767	1.043	0.453029
Error		0.27	3	0.089				

$$F_0 = \frac{s_A^2}{s_R^2}$$

Elfogadjuk a nullhipotézist.

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_A^2 = 0$$

Varianciakomponens-elemzés

<u>Ha</u> a $H_0 : \sigma_A^2 = 0$ hipotézist elutasítjuk, becsülnünk kell a σ_A^2 varianciát:

$$E\left(s_A^2\right) = \sigma_e^2 + p\sigma_A^2 \qquad E\left(s_R^2\right) = \sigma_e^2$$

$$\widehat{\left(\sigma_e^2 + p\sigma_A^2\right)} = s_A^2 \qquad \widehat{\sigma_e^2} = s_R^2 \qquad \widehat{\sigma_A^2} = \frac{s_A^2 - s_R^2}{p}$$

Summary fülön: Random effects > Var. comp.

	Components of Variance (Napszem Over-parameterized model Type III decomposition
Effect	Y
NAP	0.001907
Error	0.088767

Keresztosztályozás két véletlen faktor szerint

4. példa (Napszem.sta)

Egy elemzést nemcsak különböző napokon végeztek el, hanem különböző személyek is.

Az, hogy a mérést különböző napokon és különböző személyek végzik, okoz-e többletingadozást az egy nap egy személy végezte ismétlések szóródásához képest?

4. példa adatai:

	1. nap	2. nap	3. nap	$y_{\bullet j \bullet}$
1. személy	96.897	96.905	97.495	
	96.963	97.567	97.195	97.170
2. személy	97.232	97.241	97.215	
	97.184	97.025	97.581	97.247
3. személy	96.988	97.202	97.352	
	96.797	97.324	97.283	97.158
4. személy	97.035	97.339	97.388	
	97.095	97.318	97.168	97.224
$y_{i \bullet \bullet}$	97.024	97.240	97.335	$y_{\dots}$=97.200

Modell

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$$

nap — személy — kölcsönhatás — ismétlési hiba

$$\alpha_i \sim N\left(0, \sigma_A^2\right) \qquad \beta_j \sim N\left(0, \sigma_B^2\right) \qquad \alpha\beta_{ij} \sim N\left(0, \sigma_{AB}^2\right) \qquad \varepsilon \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$$

függetlenek!

i=1,…,r; j=1,…,q; k =1,…,p

A 4. példában r=3, q=4, p=2

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{k(ij)}$$

(nap, személy, kölcsönhatás, hiba)

Nullhipotézisek:

$$\mathrm{H}_0^A : \sigma_A^2 = 0$$

$$\mathrm{H}_0^B : \sigma_B^2 = 0$$

$$\mathrm{H}_0^{AB} : \sigma_{AB}^2 = 0$$

Szakmai kérdés: Növelik az ingadozást? Mennyire?

$$\sigma_{ytotal}^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$$

ANOVA-táblázat két véletlen faktorra

az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szabadsági fokszám	szórásnégyzet	szórásnégyzet várható értéke	F
A hatása	$S_A = qp\sum_i \left(y_{i..} - y_{...}\right)^2$	r-1	$s_A^2 = \frac{S_A}{r-1}$	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_A^2 / s_{AB}^2
B hatása	$S_B = rp\sum_j \left(y_{.j.} - y_{...}\right)^2$	q-1	$s_B^2 = \frac{S_B}{q-1}$	$pr\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_B^2 / s_{AB}^2
AB kölcsh.	$S_{AB} = $ $= p\sum_i\sum_j \left(y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...}\right)^2$	(r-1)(q-1)	$s_{AB}^2 = $ $= \frac{S_{AB}}{(r-1)(q-1)}$	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_{AB}^2 / s_R^2
Ismétlések	$S_R = \sum_i\sum_j\sum_k \left(y_{ijk} - y_{ij.}\right)^2$	rq(p-1)	$s_R^2 = \frac{S_R}{rq(p-1)}$	σ_e^2	
Teljes	$S_0 = \sum_i\sum_j \left(y_{ij} - y_{..}\right)^2$	rqp-1			

Statistics > Advanced Linear/Nonlinear Models > General Linear Models > > Factorial ANOVA

Options fülön: Random → Nap, Szem

Effect	Univariate Tests of Significance for Y (Napszem in Napszem) Over-parameterized model Type III decomposition; Std. Error of Estimate: 0,1853							
	Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	226746,(	1	226746,(	1,73047	0,189467	1196759	0,000005
NAP	Random	0,406	2	0,203	6,00000	0,024319	8,348	0,018476
SZEM	Random	0,032	3	0,011	6,00000	0,024319	0,443	0,730944
NAP*SZEM	Random	0,146	6	0,024	12,00000	0,034337	0,708	0,649658
Error		0,412	12	0,034				

Effect	Expected Mean Square Coefficients (Napszem) Over-parameterized model Type III decomposition Effect (F/R)	Intercpt	NAP	SZEM	NAP*SZEM	Error
Intercept	Fixed	24.0000(	8.00000(	6.00000(	2.00000(	1.00000(
NAP	Random		8.00000(		2.00000(	1.00000(
SZEM	Random			6.00000(	2.00000(	1.00000(
NAP*SZEM	Random				2.00000(	1.00000(
Error						1.00000(

Az eltérés forrása	df	E(MS)	E(MS)
A: nap	2	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$8\sigma_A^2 + 2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
B: személy	3	$pr\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$6\sigma_B^2 + 2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
AB: kölcsönhatás	6	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	$2\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$
csoportokon belüli	12	σ_e^2	σ_e^2

Varianciakomponens-elemzés

Az eltérés forrása	df	E(MS)	MS	MS
A: nap	2	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_A^2	0,20317
B: személy	3	$pr\sigma_B^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_B^2	0,01078
AB: kölcsönhatás	6	$p\sigma_{AB}^2 + \sigma_e^2$	s_{AB}^2	0,02431
csoportokon belüli	12	σ_e^2	s_R^2	0,03426

Components of Variance (Napszem
Over-parameterized model
Type III decomposition

Effect	Y
NAP	0.0223
SZEM	-0.0023
NAP*SZEM	-0.0050
Error	0.0343

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{s_A^2 - s_{AB}^2}{qp} = \frac{0.20317 - 0.02431}{8} = 0.0223$$

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{s_B^2 - s_{AB}^2}{rp} = \frac{0.0108 - 0.02431}{6} = -0.0023$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = s_R^2 = 0.0343$$

Hierarchikus osztályozás

5. példa (Moisture.sta)

Festékgyári nedvesség-tartalom meghatározása:

15 gyártott adagból két-két mintát vesznek, mindkét minta víztartalmát kétszer-kétszer megmérik.

(Box-Hunter-Hunter: Statistics for Experimenters, J. Wiley, 1978, p. 571)

gyártott adagok	1								2								…	15							
minták	1				2				3				4				…	29				30			
	(1)				(2)				(1)				(2)				…	(1)				(2)			
elemzés	1		2		3		4		5		6		7		8		…	57		58		59		60	
	(1)		(2)		(1)		(2)		(1)		(2)		(1)		(2)		…	(1)		(2)		(1)		(2)	

Az 5. példa adattáblázatának egy részlete:

adag	minta	elemzés		minta átlaga	adag átlaga
1	1	40.0	39.0	39.5	34.75
	2	30.0	30.0	30.0	
2	3	26.0	28.0	27.0	26.25
	4	25.0	26.0	25.5	
3	5	29.0	28.0	28.5	21.5
	6	14.0	15.0	14.5	
15	29	39.0	37.0	38.0	32.50
	30	26.0	28.0	27.0	

Hierarchikus (beágyazott) modell

A modell: $y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{k(ij)}$

adag minta analízis

A β faktor (minta) szintjei különböznek az α faktor (adag) különböző szintjein,
azaz a β faktor (minta) szintjei az α faktor (adag) szintjeibe vannak ágyazva.

A modellt a kísérlet elrendezése, a kísérleti terv szerkezete dönti el!

Az 5. példa megoldásának folytatása:

Milyen típusúak a faktorok?

Ezt (ahogy tanultuk) a ***szakmai kérdés alapján*** döntjük el.

Itt: mindkét faktor (adag, minta) véletlen.

$$\alpha_i \sim N\left(0, \sigma_A^2\right) \qquad \beta_j \sim N\left(0, \sigma_B^2\right) \qquad \varepsilon_{k(ij)} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$$

Ennek megfelelően a nullhipotézisek:

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_A^2 = 0 \qquad \mathrm{H}_0 : \sigma_{B(A)}^2 = 0$$

Hierarchikus osztályozás ANOVA-táblázata

az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szab. fok	szórásnégyzet	szórásnégyzet várható értéke	F
A hatása	$S_A = qp\sum_i \left(y_{i\cdot\cdot} - y_{\cdot\cdot\cdot}\right)^2$	r-1	$s_A^2 = \dfrac{S_A}{r-1}$	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	$s_A^2 / s_{B(A)}^2$
$B(A)$ hatása	$S_{B(A)} = p\sum_i\sum_j \left(y_{ij\cdot} - y_{i\cdot\cdot}\right)^2$	$r(q$-1)	$s_{B(A)}^2 = \dfrac{S_{B(A)}}{r(q-1)}$	$p\sigma_B^2 + \sigma_e^2$	$s_{B(A)}^2 / s_R^2$
Ismétlések	$S_R = \sum_i\sum_j\sum_k \left(y_{ijk} - y_{ij\cdot}\right)^2$	$rq(p$-1)	$s_R^2 = \dfrac{S_R}{rq(p-1)}$	σ_e^2	

Próbastatisztika:

$$\mathrm{H}_0^A : \sigma_A^2 = 0 \qquad s_A^2 / s_{B(A)}^2$$

$$\mathrm{H}_0^B : \sigma_{B(A)}^2 = 0 \qquad s_{B(A)}^2 / s_R^2$$

Variancia-komponens elemzés:

$$\widehat{\sigma_A^2} = \frac{s_A^2 - s_{B(A)}^2}{qp}$$

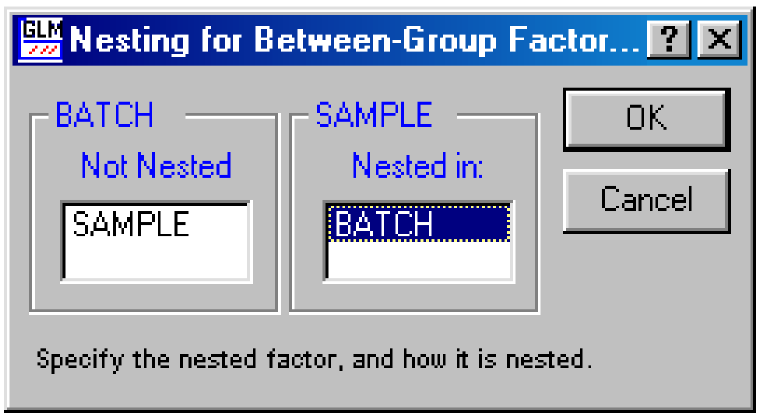
$$\widehat{\sigma_B^2} = \frac{s_{B(A)}^2 - s_R^2}{p}$$

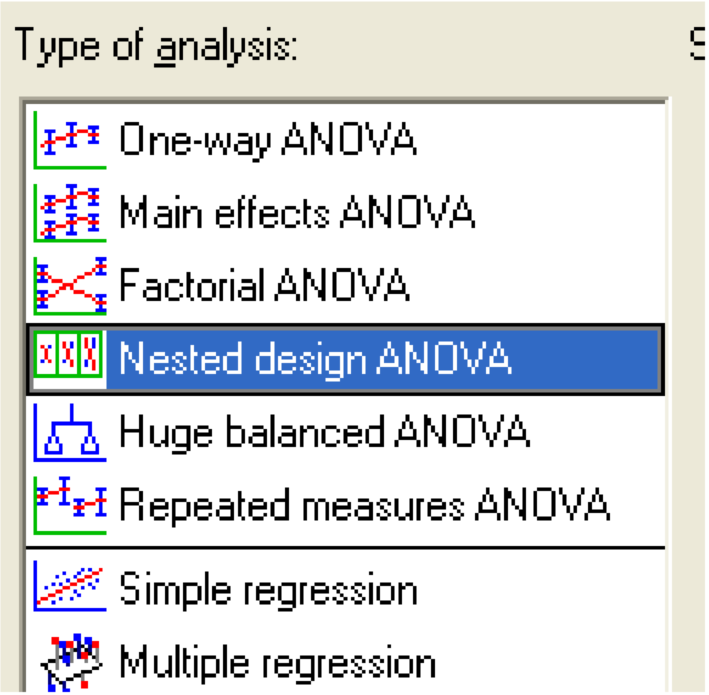
Az 5. példa megoldása STATISTICA szoftverben:

Statistics > Advanced Linear/Nonlinear Models > General Linear Models > > **Nested design ANOVA**

Options fülön: Random batch, sample

Between effects





Az 5. példa megoldásának eredménytáblázatai

Effect	Univariate Tests of Significance for MOISTURE (Moisture) Over-parameterized model Type III decomposition Effect (F/R)	SS	Degr. of Freedom	MS	Den.Syn. Error df	Den.Syn. Error MS	F	p
Intercept	Fixed	43040.82	1	43040.82	14.0	86.495	497.61	0.0000
BATCH	Random	1210.93	14	86.50	15.0	57.983	1.49	0.2256
MSAMPLE(BATCH)	Random	869.75	15	57.98	30.0	0.917	63.25	0.0000
Error		27.50	30	0.92				

Effect	Components of Variance (Moisture Over-parameterized model Type III decomposition MOISTURE
BATCH	7.13
MSAMPLE(BATCH)	28.53
Error	0.92

Értelmezzük a kapott eredményeket!

Gondoljuk át, hogy hogyan kellene módosítani a kísérleti elrendezést, hogy a **4. példa** (amikor ugyanazt az analitikai elemzést több személy több különböző napon végezte el) **hierarchikus modellel** kellene megoldani!

a) A nap faktor legyen a személy faktorba ágyazva!

b) A személy faktor legyen a nap faktorba ágyazva!