Általános algoritmus a szórásnégyzetek várható értékének levezetésére kiegyensúlyozott tervekhez

Lorenzen T. J., Anderson, V. L.: Design of experiment.
A no-name approach. Marcel Dekker, 1993 (p. 68) nyomán

Eltérés az eredetitől:
a véletlen és vegyes hatásokra nem alkalmazzuk a „sum to zero” megkötést

A statisztikai programok általában minden szórásnégyzetet megadnak, de a várható értéküket nem mindig helyesen, ezért az *F*-próba nevezője nem mindig megfelelő.

Az algoritmus lépései:

1. Írjuk föl a modell tagjait (hatások, kölcsönhatások) egy táblázat fejléceként, indexeikkel együtt.
2. Írjunk föl minden nem-zérus szabadsági fokú tagot a táblázat bal szélére, egymás alá.
3. A fejlécben minden tag betűjele fölé írjunk F, R vagy M betűt, aszerint, hogy rögzített (fixed), véletlen (random) vagy vegyes (mixed) hatásról van szó. Vegyes hatás akkor áll elő, ha egy kölcsönhatás egyes komponensei rögzítettek, mások véletlenszerűek. Az egymásba ágyazott faktorok miatt előforduló zárójeles indexű hatásokat véletlen jellegűnek (random) tekintjük.
4. Minden sorban balról jobbra haladva írjunk *-ot, ha az oszlop fejléce tartalmazza a bal szélső oszlopbeli hatás indexét. Itt ne legyünk tekintettel az indexek zárójelezésére.

5. Az F jelű oszlopokban (a rögzített hatásoknál) radírozzuk ki a *-ot, és ha a hatás indexe a fejlécben és a bal szélen megegyezik, írjunk -et.
6. Az R jelű oszlopokban (véletlen hatások) és az M jelű oszlopokban (a vegyes hatásoknál) a *-ot hagyjuk változatlanul. A zárójeles indexű tagok véletlen jellegűnek tekintendők.
7. A fejlécben lévő minden hatáshoz írjuk azt az egész számot, amelyet az összes kísérlet számát az illető hatás indexeinek határaival elosztva kapunk.
8. A szórásnégyzetek várható értékét úgy kapjuk, hogy soronként olvasva a táblázatot, a * helyére a megfelelő hatás σ^2-ét, a helyére a rögzített hatás Φ függvényét írjuk, együtthatóként pedig a fölülre írt egész számokat használjuk.

$$\Phi(A) = \frac{\sum_{i}^{r} \alpha_i^2}{r-1}$$

8. példa

Számítsuk ki a szórásnégyzetek várható értékét, ha
A rögzített, kétszintes (i =1, 2)
B véletlen, négyszintes (j = 1,...,4)
C rögzített, háromszintes (k = 1, 2, 3)
a 2*4*3-as tervet kétszer megismételjük (l = 1, 2)

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{l(ijk)}$$

	F	R	M	F	F	M	M	R
	A_i	B_j	AB_{ij}	C_k	AC_{ik}	BC_{jk}	ABC_{ijk}	$\varepsilon_{l(ijk)}$
A_i	*		*		*		*	*
B_j		*	*			*	*	*
AB_{ij}			*				*	*
C_k				*	*	*	*	*
AC_{ik}					*		*	*
BC_{jk}						*	*	*
ABC_{ijk}							*	*
$\varepsilon_{l(ijk)}$								*

	F	R	M	F	F	M	M	R
	A_i	B_j	AB_{ij}	C_k	AC_{ik}	BC_{jk}	ABC_{ijk}	$\varepsilon_{l(ijk)}$
A_i	■		*				*	*
B_j		*	*			*	*	*
AB_{ij}			*				*	*
C_k				■		*	*	*
AC_{ik}					■		*	*
BC_{jk}						*	*	*
ABC_{ijk}							*	*
$\varepsilon_{l(ijk)}$								*

	24	12	6	16	8	4	2	1
	F	R	M	F	F	M	M	R
	A_i	B_j	AB_{ij}	C_k	AC_{ik}	BC_{jk}	ABC_{ijk}	$\varepsilon_{l(ijk)}$
A_i	■		*				*	*
B_j		*	*			*	*	*
AB_{ij}			*				*	*
C_k				■		*	*	*
AC_{ik}					■		*	*
BC_{jk}						*	*	*
ABC_{ijk}							*	*
$\varepsilon_{l(ijk)}$								*

Hatás	Szórásnégyzet	Szab. fok	A szórásnégyzet várható értéke
A_i	s_A^2	1	$24\Phi(A)+6\sigma_{AB}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
B_j	s_B^2	3	$12\sigma_B^2+6\sigma_{AB}^2+4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
AB_{ij}	s_{AB}^2	3	$6\sigma_{AB}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
C_k	s_C^2	2	$16\Phi(C)+4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
AC_{ik}	s_{AC}^2	2	$8\Phi(AC)+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
BC_{jk}	s_{BC}^2	6	$4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
ABC_{ijk}	s_{ABC}^2	6	$2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	s_R^2	24	σ_e^2

Hatás	Szórásnégyzet	Szab. fok	A szórásnégyzet várható értéke
A_i	s_A^2	1	$24\Phi(A)+6\sigma_{AB}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
B_j	s_B^2	3	$12\sigma_B^2+6\sigma_{AB}^2+4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
AB_{ij}	s_{AB}^2	3	$6\sigma_{AB}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
C_k	s_C^2	2	$16\Phi(C)+4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
AC_{ik}	s_{AC}^2	2	$8\Phi(AC)+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
BC_{jk}	s_{BC}^2	6	$4\sigma_{BC}^2+2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
ABC_{ijk}	s_{ABC}^2	6	$2\sigma_{ABC}^2+\sigma_e^2$
$\varepsilon_{l(ijk)}$	s_R^2	24	σ_e^2

A használható összehasonlítások:

A/*AB*, *B*/(*AB*+*BC*-*ABC*), *C*/*BC*, *AB*/*ABC*, *AC*/*ABC*, *BC*/*ABC*, *ABC*/*R*

B/(*AB*+*BC*-*ABC*) helyett *B*/*AB* csak-nem-szignifikáns

(ha szignifikáns, nem tudjuk, hogy *B* vagy *BC* a jelentős, mivel mindkettővel több a számláló a nevezőnél).

A kimutatható hatások nagysága

Lorenzen T. J., Anderson, V. L.: Design of experiment. A no-name approach. Marcel Dekker, 1993 nyomán

Rögzített faktorokra és kölcsönhatásokra

	df numerator								
df denom.	1	2	3	4	5	6	10	20	50
1	20.96	23.25	24.16	24.65	24.95	25.15	25.57	25.89	26.08
2	6.796	6.710	6.682	6.668	6.659	6.653	6.642	6.633	6.628
3	5.014	4.630	4.475	4.390	4.336	4.299	4.221	4.159	4.121
4	4.396	3.900	3.692	3.576	3.502	3.450	3.339	3.250	3.193
5	4.092	3.538	3.301	3.166	3.079	3.018	2.886	2.777	2.707
6	3.913	3.324	3.068	2.921	2.825	2.757	2.609	2.486	2.405
7	3.795	3.183	2.914	2.759	2.656	2.583	2.423	2.287	2.197
8	3.712	3.084	2.805	2.643	2.535	2.458	2.288	2.142	2.044
10	3.604	2.953	2.661	2.489	2.375	2.292	2.107	1.944	1.832
12	3.536	2.871	2.570	2.392	2.272	2.186	1.989	1.814	1.690
14	3.489	2.815	2.508	2.325	2.202	2.112	1.907	1.721	1.588
16	3.455	2.774	2.463	2.276	2.150	2.058	1.846	1.652	1.510
18	3.429	2.743	2.428	2.239	2.111	2.017	1.800	1.598	1.449
20	3.409	2.718	2.401	2.210	2.080	1.984	1.762	1.554	1.399
22	3.393	2.698	2.379	2.186	2.054	1.957	1.732	1.519	1.357
24	3.380	2.682	2.361	2.166	2.033	1.935	1.707	1.489	1.322
26	3.368	2.669	2.346	2.150	2.016	1.917	1.686	1.464	1.292
28	3.359	2.657	2.333	2.136	2.001	1.901	1.667	1.442	1.265
30	3.351	2.647	2.322	2.124	1.988	1.888	1.652	1.423	1.242
40	3.322	2.613	2.283	2.082	1.944	1.841	1.597	1.355	1.159
60	3.295	2.580	2.246	2.042	1.900	1.794	1.542	1.287	1.070
80	3.281	2.563	2.227	2.022	1.878	1.772	1.515	1.252	1.022
100	3.273	2.554	2.216	2.010	1.866	1.758	1.498	1.231	.9926
200	3.257	2.534	2.195	1.986	1.840	1.731	1.466	1.187	.9298
500	3.248	2.523	2.182	1.972	1.825	1.715	1.446	1.161	.8894
1000	3.245	2.519	2.178	1.967	1.820	1.709	1.439	1.152	.8754
∞	3.242	2.515	2.173	1.962	1.815	1.704	1.433	1.143	.8610

Rögzített faktorra

α=0,05

β =0,1

$$\sqrt{C\,\frac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})}}$$

A táblázatban $\sqrt{C\,\dfrac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})}}$ értékei vannak

r-szintes rögzített faktorra,
α=0.05, β =0.1

$$\Phi(A)=\frac{\sum_{i}^{r}\alpha_i^2}{r-1},$$

C = a kísérletek száma / a hatás szintjeinek száma

8. példa - folytatás

Számítsuk ki a kimutatható eltérés nagyságát az előbbi példa **_C_ faktorára!**

A rögzített, kétszintes (i =1, 2)

B véletlen, négyszintes (j = 1,...,4)

C rögzített, háromszintes (k = 1, 2, 3)

a 2*4*3-as tervet kétszer megismételjük (l = 1, 2)

A ***C faktorra*** vonatkozó próbastatisztika: $F_0 = \dfrac{s_C^2}{s_{BC}^2}$

- a számláló szabadsági foka 3-1=2
- a nevezőé szabadsági foka (4-1)*(3-1)=6
- a táblázatos érték 3,324
- C=48/3=16

azaz: $$\sqrt{\frac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})}} = \frac{3{,}324}{\sqrt{16}} = 0{,}831$$

ismert korábbról:

$$EMS(BC) = 4\sigma_{BC}^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + \sigma_e^2 \qquad \Phi(C) = \frac{\sum_k^t \gamma_k^2}{(t-1)}$$

tehát:

$$\frac{\Phi(\text{hatás})}{EMS(\text{nevező})} = \frac{\Phi(C)}{4\sigma_{BC}^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + \sigma_e^2} = \frac{\sum_k^t \gamma_k^2}{\left(4\sigma_{BC}^2 + 2\sigma_{ABC}^2 + \sigma_e^2\right)(t-1)} = 0{,}831^2 = 0{,}69$$

Ha föltesszük, hogy a BC és ABC kölcsönhatások nem léteznek, akkor is a kimutatható hatás (szórás-szerűen kifejezve) a kísérleti ingadozás szórásának ekkora része.

Véletlen faktorokra és kölcsönhatásokra

A táblázatban $\sqrt{C\,\dfrac{\sigma^2_{\text{hatás}}}{EMS(\text{nevező})}}$ értékei vannak

C a kísérletek száma/a hatás szintjeinek száma

	1	2	3	4	5	6	10	20	50
1	80.218	41.231	34.549	31.932	30.554	29.707	28.171	27.143	26.573
2	30.255	13.038	10.182	9.068	8.481	8.121	7.465	7.025	6.780
3	23.276	9.301	7.001	6.100	5.624	5.330	4.792	4.429	4.225
4	20.722	7.949	5.849	5.024	4.585	4.313	3.813	3.471	3.278
5	19.423	7.264	5.265	4.476	4.054	3.793	3.308	2.973	2.782
6	18.641	6.853	4.913	4.145	3.733	3.476	2.998	2.665	2.473
7	18.121	6.580	4.679	3.924	3.518	3.264	2.789	2.455	2.260
8	17.750	6.385	4.512	3.765	3.364	3.111	2.638	2.301	2.104
10	17.258	6.126	4.289	3.554	3.157	2.907	2.433	2.091	1.887
12	16.946	5.963	4.148	3.420	3.025	2.775	2.300	1.953	1.742
14	16.731	5.850	4.050	3.327	2.933	2.684	2.207	1.854	1.637
16	16.574	5.767	3.979	3.259	2.866	2.617	2.137	1.780	1.557
18	16.454	5.704	3.924	3.206	2.814	2.565	2.084	1.723	1.494
20	16.360	5.655	3.881	3.165	2.774	2.524	2.041	1.676	1.443
22	16.284	5.615	3.846	3.132	2.741	2.491	2.007	1.638	1.400
24	16.221	5.582	3.818	3.104	2.713	2.464	1.978	1.606	1.364
26	16.168	5.554	3.794	3.081	2.690	2.440	1.953	1.579	1.333
28	16.123	5.530	3.773	3.061	2.671	2.421	1.933	1.556	1.306
30	16.084	5.510	3.755	3.044	2.654	2.404	1.915	1.535	1.282
40	15.950	5.440	3.694	2.985	2.595	2.344	1.852	1.463	1.196
60	15.819	5.371	3.634	2.927	2.537	2.286	1.788	1.390	1.105
80	15.755	5.337	3.605	2.899	2.508	2.257	1.757	1.352	1.056
100	15.716	5.317	3.587	2.882	2.491	2.240	1.738	1.329	1.025
200	15.640	5.277	3.552	2.848	2.457	2.205	1.700	1.282	.960
500	15.595	5.253	3.531	2.828	2.437	2.185	1.677	1.254	.919
1000	15.580	5.246	3.524	2.821	2.431	2.178	1.670	1.244	.904

Véletlen faktorra

α=0,05

β =0,1

$$\sqrt{C\,\frac{\sigma^2_{\text{hatás}}}{EMS(\text{nevező})}}$$

8. példa - folytatás

Számítsuk ki a kimutatható eltérés nagyságát az előbbi példa **_BC_ kölcsönhatására**!

A rögzített, kétszintes (i =1, 2)

B véletlen, négyszintes (j = 1,...,4)

C rögzített, háromszintes (k = 1, 2, 3)

a 2*4*3-as tervet kétszer megismételjük (l = 1, 2)

Az összehasonlításnál ((*BC*/*ABC*) a számláló szabadsági foka (4-1)·(3-1) =6, a nevezőé 6, a táblázatos érték 3,476, *C*=48/12=4, vagyis

$$\sqrt{\frac{\sigma^2_{\text{hatás}}}{EMS(\text{nevező})}} = \frac{3.476}{\sqrt{4}} = 1.738 \qquad EMS(ABC) = 2\sigma^2_{ABC} + \sigma^2_e$$

vagyis a *BC* hatás (szórásban kifejezve) az *EMS*(*ABC*) gyökének ennyiszerese kell legyen, hogy 90% biztonsággal kimutassuk.
Ha $\sigma^2_{ABC} = 0$, a kísérleti szórás ennyiszerese kell legyen.