

## Két faktor szerinti ANOVA

Az  $A$  faktor minden szintjét kombináljuk a  $B$  faktor minden szintjével → **keresztosztályozás**

Kiegyensúlyozott terv: ha minden „cellában” azonos számú ismétlés van.

A terv szerkezete miatt a faktorok hatását egymásétól függetlenül vizsgálhatjuk.

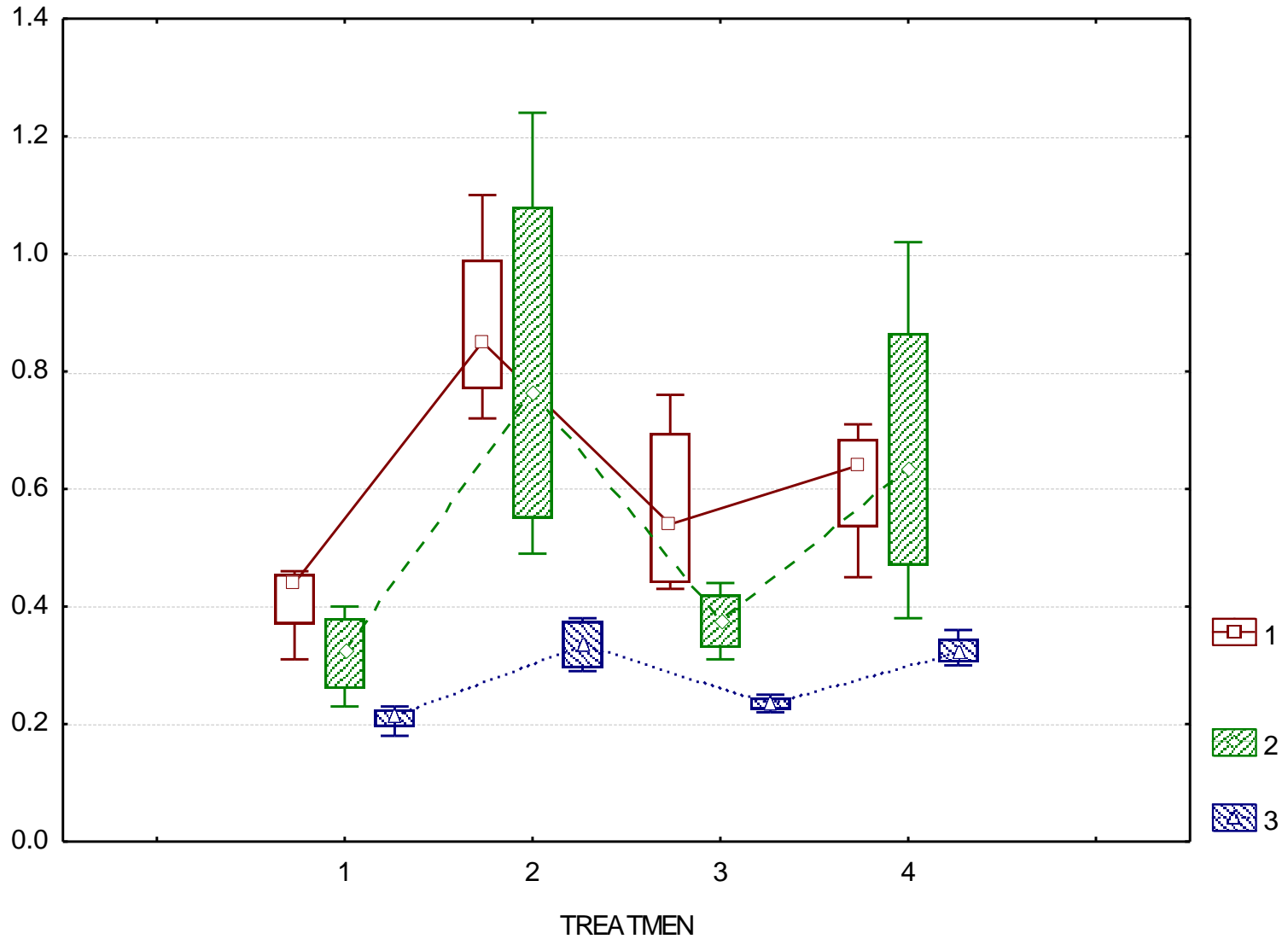
(Statistics >Advanced Linear/Nonlinear Models >General Linear Models >  
> Factorial ANOVA)

## 2. példa (poison.sta)

Túlélési idő vizsgálata különféle mérgek és különböző kezelések esetén  
(Box-Hunter-Hunter: Statistics for Experimenters, J. Wiley, 1978, p. 228)

		treatment			
		A	B	C	D
poison	I	0.310	0.820	0.430	0.450
		0.450	1.100	0.450	0.710
		0.460	0.880	0.630	0.660
		0.430	0.720	0.760	0.620
	II	0.360	0.920	0.440	0.560
		0.290	0.610	0.350	1.020
		0.400	0.490	0.310	0.710
		0.230	1.240	0.400	0.380
	III	0.220	0.300	0.230	0.300
		0.210	0.370	0.250	0.360
		0.180	0.380	0.240	0.310
		0.230	0.290	0.220	0.330

# Adatok ábrázolása: Box-plot



$$i=1,\dots,r \quad j=1,\dots,q \quad k=1,\dots,p$$

# Modell

$$N = rqp = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$$

## 1. átlag-modell

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ismétlés ( $k$ )

méreg ( $i$ )      kezelés ( $j$ )

$$H_0 : \mu_{11} = \mu_{12} = \dots = \mu_{34} \quad (\text{mind azonos})$$

## 2. hatás-modell

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

az  $i$ -edik mérég  
hatása

a  $j$ -edik kezelés  
hatása

**kölcsönhatás!**

$$H_0^A : \alpha_i = 0, i = 1, \dots, r$$

$$H_0^B : \beta_j = 0, j = 1, \dots, q$$

$$H_0^{AB} : \alpha\beta_{ij} = 0, i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, q$$

# Statisztikai számítás: ANOVA-táblázat

Az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	szabadsági fok	szórásnégyzet	F
A hatása (sorok közötti)	$S_A = qp \sum_i (y_{i.} - y_{...})^2$	$r-1$	$s_A^2 = \frac{S_A}{r-1}$	$s_A^2 / s_R^2$
B hatása (oszlopok közötti)	$S_B = rp \sum_j (y_{.j} - y_{...})^2$	$q-1$	$s_B^2 = \frac{S_B}{q-1}$	$s_B^2 / s_R^2$
AB kölcsönhatás	$S_{AB} = p \sum_i \sum_j (y_{ij.} - y_{i.} - y_{.j} + y_{...})^2$	$(r-1) \cdot (q-1)$	$s_{AB}^2 = \frac{S_{AB}}{(r-1)(q-1)}$	$s_{AB}^2 / s_R^2$
Maradék (csoportokon belüli)	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - y_{ij.})^2$	$rq(p-1)$	$s_R^2 = \frac{S_R}{rq(p-1)}$	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j \sum_k (y_{ijk} - y_{...})^2$	$rqp-1$		

Univariate Tests of Significance for SURVIVAL (Poisor Sigma-restricted parameterization Effective hypothesis decomposition

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	11.03042	1	11.03042	495.9194	0.000000
POISON	1.03301	2	0.51651	23.2217	0.000000
TREATMEN	0.92121	3	0.30707	13.8056	0.000004
POISON*TREATMEN	0.25014	6	0.04169	1.8743	0.112251
Error	0.80073	36	0.02224		

(Summary fülön:  
All effects)

# A modell paramétereinek becslése

Parameter Estimates (Poison in Workbook2)	
Sigma-restricted parameterization	
Effect	SURVIVAL Param.
Intercept	0,479375
POISON	0,138125
POISON	0,065000
TREATMEN	-0,165208
TREATMEN	0,197292
TREATMEN	-0,086875
POISON*TREATMEN	-0,039792
POISON*TREATMEN	0,065208
POISON*TREATMEN	0,036875
POISON*TREATMEN	-0,059167
POISON*TREATMEN	0,07
POISON*TREATMEN	-0,08

$\mu$   
 $\alpha_1$   
 $\beta_1$   
 $\alpha\beta_1$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 mérég (i)                      kezelés (j)

POISON\*TREATMEN; Weighted Means (Poison in Workbook2)  
 Current effect: F(6, 36)=1,8743, p=,11225  
 Effective hypothesis decomposition

Cell No.	POISON	TREATMEN	SURVIVAL Mean	SURVIVAL Std.Err.	SURVIVAL -95,00%	SURVIVAL +95,00%	N
$\mu_{11} \rightarrow$ 1	1	1	0,412500	0,034731	0,301970	0,523030	4
$\mu_{12} \rightarrow$ 2	1	2	0,880000	0,080416	0,624082	1,135918	4
3	1	3	0,567500	0,078355	0,318138	0,816862	4
4	1	4	0,610000	0,056421	0,430443	0,789557	4
$\mu_{21} \rightarrow$ 5	2	1	0,320000	0,037639	0,200217	0,439783	4
6	2	2	0,815000	0,168152	0,279866	1,350134	4
7	2	3	0,375000	0,028431	0,284519	0,465481	4
8	2	4	0,667500	0,135485	0,236326	1,098674	4
9	3	1	0,210000	0,010801	0,175626	0,244374	4
10	3	2	0,335000	0,023274	0,260933	0,409067	4
11	3	3	0,235000	0,006455	0,214457	0,255543	4
12	3	4	0,325000	0,013229	0,282900	0,367100	4

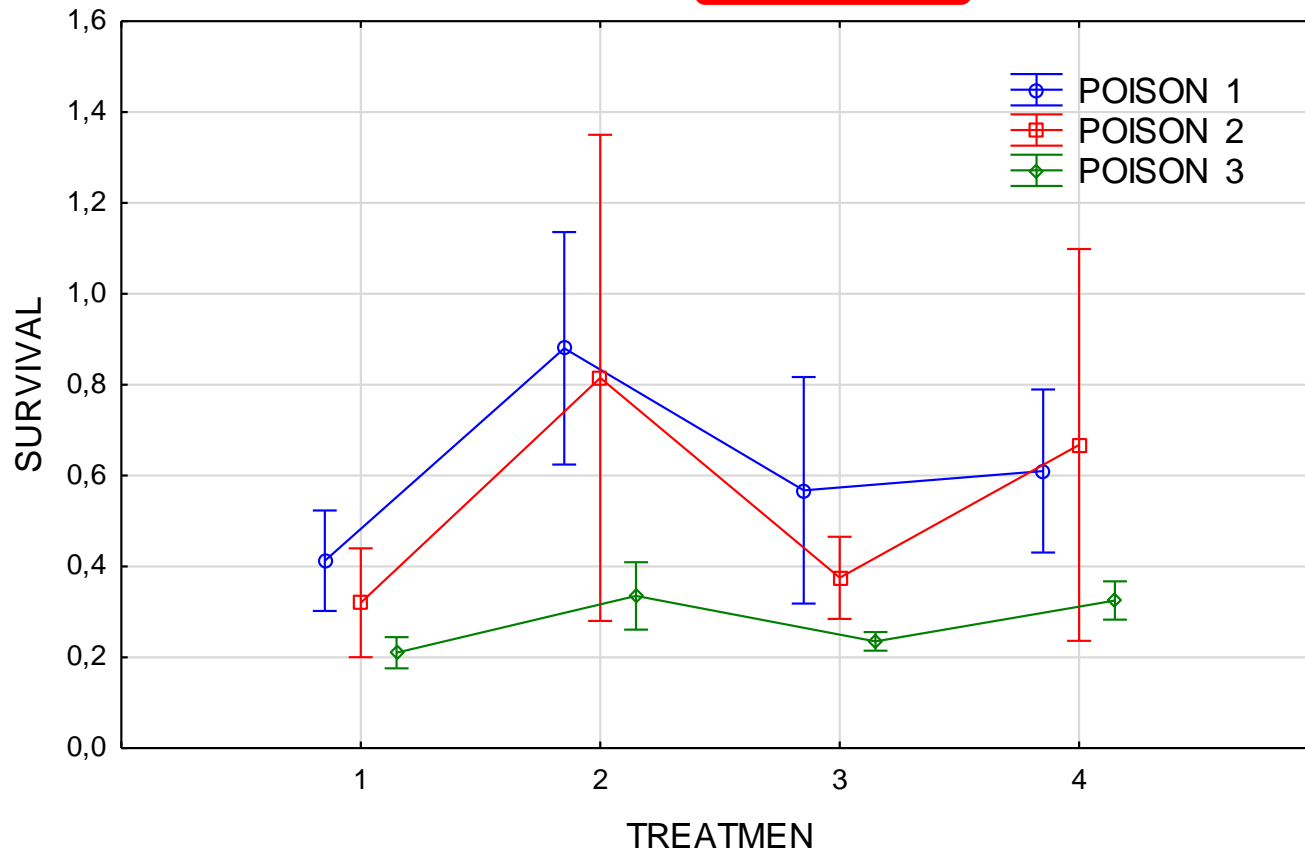
(Means fülön:  
 Observed,  
 weighted)

# A modell paramétereinek becslése

**POISON\*TREATMEN; Weighted Means**

Current effect:  $F(6, 36)=1,8743, p=,11225$

Vertical bars denote 0,95 confidence intervals





# ANOVA feltételezéseinek ellenőrzése

1. Homoszkedaszticitás:  $\sigma_e^2 = \text{konst ?}$

a) Statisztikai próbákkal

Tests of Homogeneity of Variances (Poison) Effect: POISON*TREATMEN					
	Hartley F-max	Cochran C	Bartlett Chi-Sqr.	df	p
SURVIVAL	678.6000	0.423741	45.13689	11	0.000005

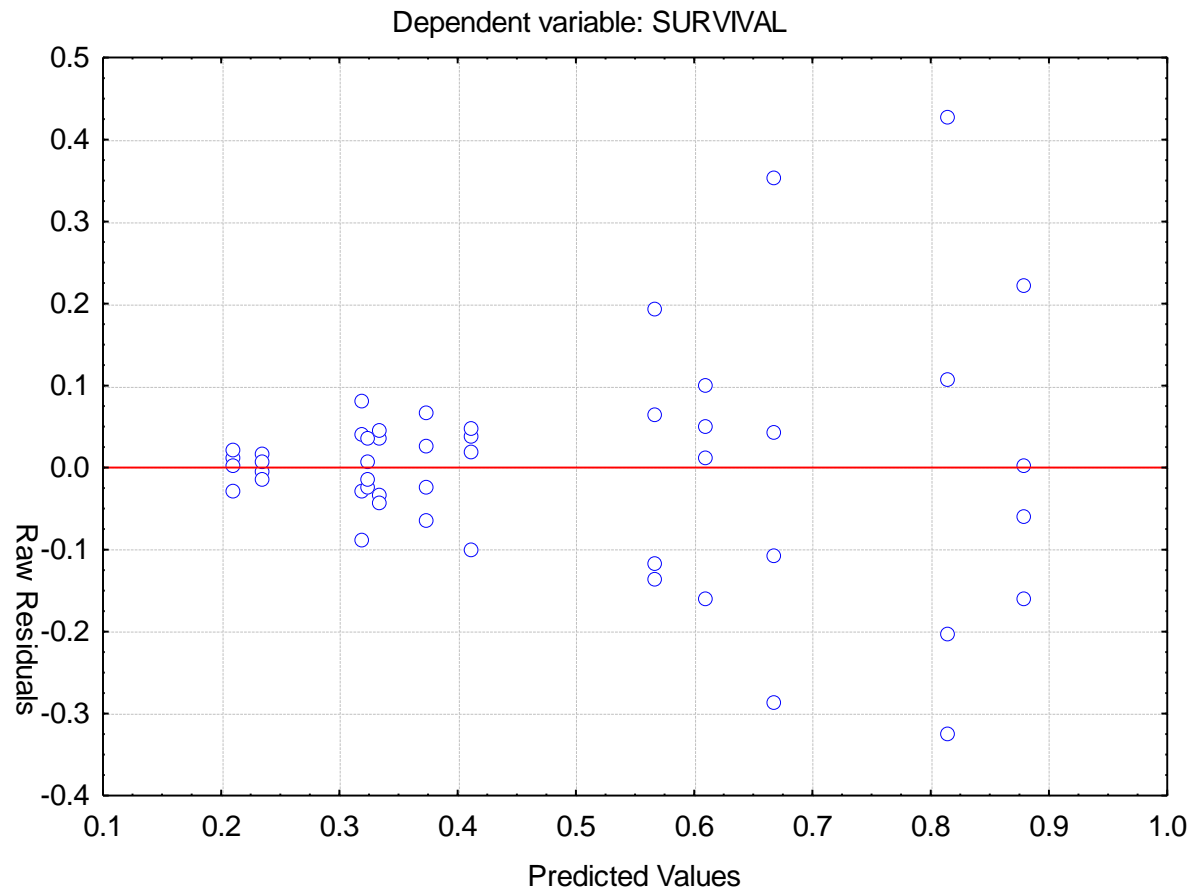
Döntés?

Levene's Test for Homogeneity of Variances (Poison) Effect: POISON*TREATMEN Degrees of freedom for all F's: 11, 36				
	MS Effect	MS Error	F	p
SURVIVAL	0.024601	0.005069	4.853537	0.000144

(More results > Assumptions fülön: Homogeneity of variances)

1. Homoszkedaszticitás:  $\sigma_e^2 = \text{konst} ?$

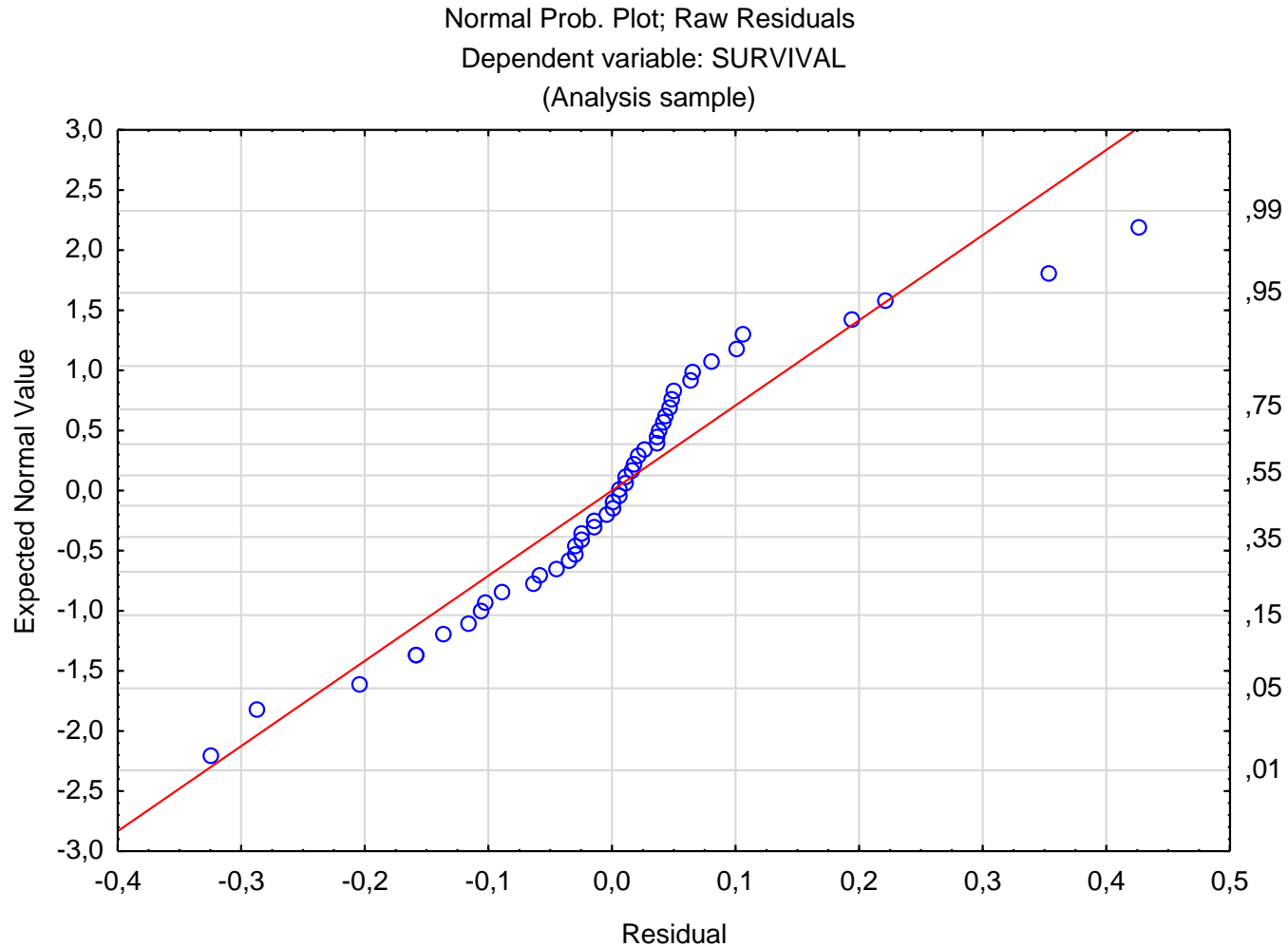
b) A reziduumok vizsgálatával



Döntés?

(Residuals1 fülön: Pred. & resid.)

## 2. Hibák normális eloszlásúak?



# Box-Cox transzformáció

**Alkalmazható, ha:**  $\sigma_y \sim \bar{y}^\alpha$

**Cél:**  $Var(y^{tr}) = \text{konst}$

Levezethető a hibaterjedési törvényből:

$$Var(y^{tr}) = \left( \frac{dy^{tr}}{dy} \right)^2 \sigma_y^2 = \left( \frac{dy^{tr}}{dy} \right)^2 y^{2\alpha}$$

$$Var(y^{tr}) = \text{konst} \quad \text{ha} \quad \frac{dy^{tr}}{dy} y^\alpha = \text{konst}$$

$$\text{Szeparálva:} \quad dy^{tr} = ky^{-\alpha} dy$$

Integrálva:

$$y^{tr} = \int y^{-\alpha} dy = \begin{cases} y^{1-\alpha} & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \ln y & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

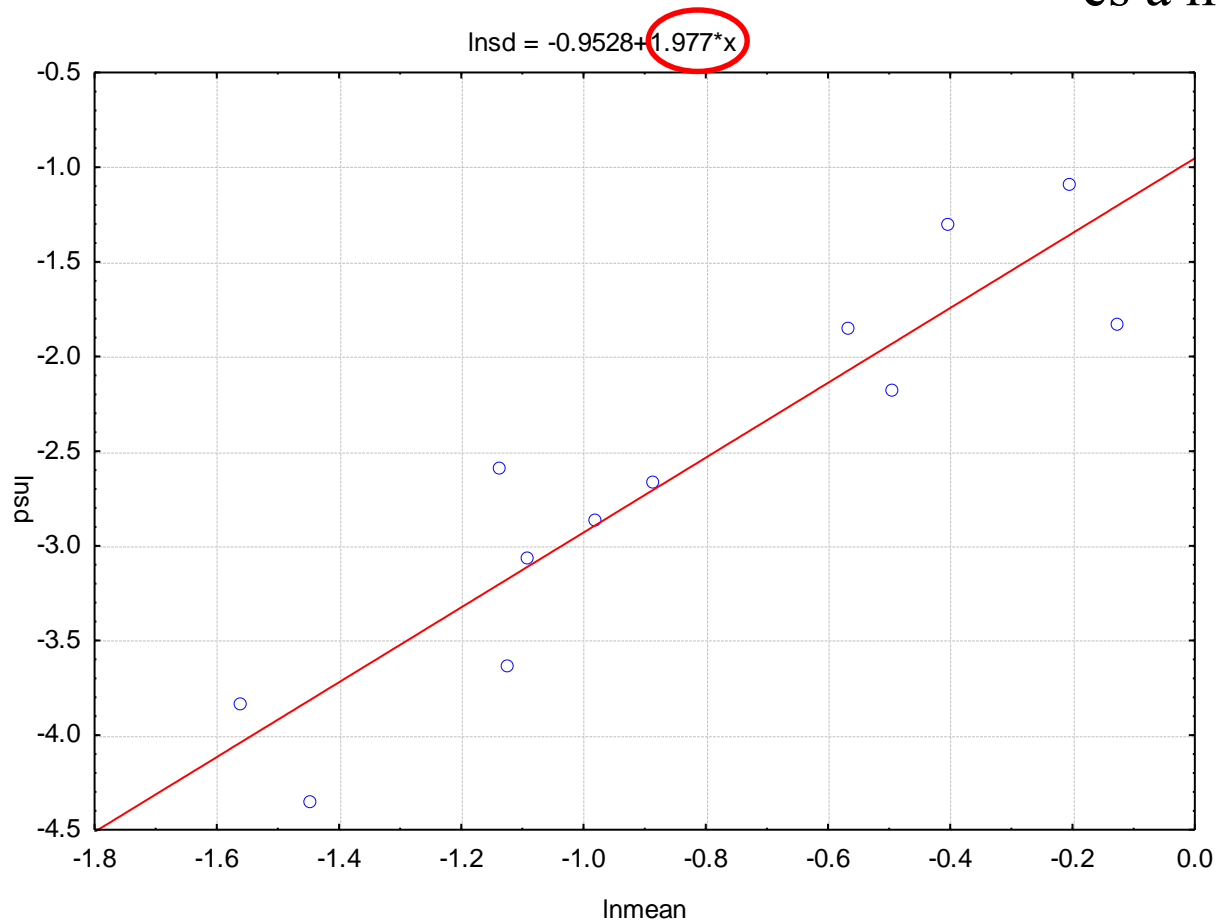
$$y^{tr} = \int y^{-\alpha} dy = \begin{cases} y^{1-\alpha} & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ \ln y & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

$\alpha$	$\lambda=1-\alpha$	transzformáció ( $y^\lambda$ )
2	-1	$1/y$
1.5	-0.5	$1/\sqrt{y}$
1	0	$\ln y$
0.5	0.5	$\sqrt{y}$
0	1	(nincs transzformáció)

## Az $\alpha$ kitevő megkeresése grafikus úton:

$$\sigma_y \sim \bar{y}^\alpha \quad \ln \sigma_y = k + \alpha \ln \bar{y}$$

egyenest kell illeszteni,  
és a meredekségét nézni



$$\alpha \approx 2$$

$$\sigma_y \sim \bar{y}^2$$

$$\lambda \approx -1$$

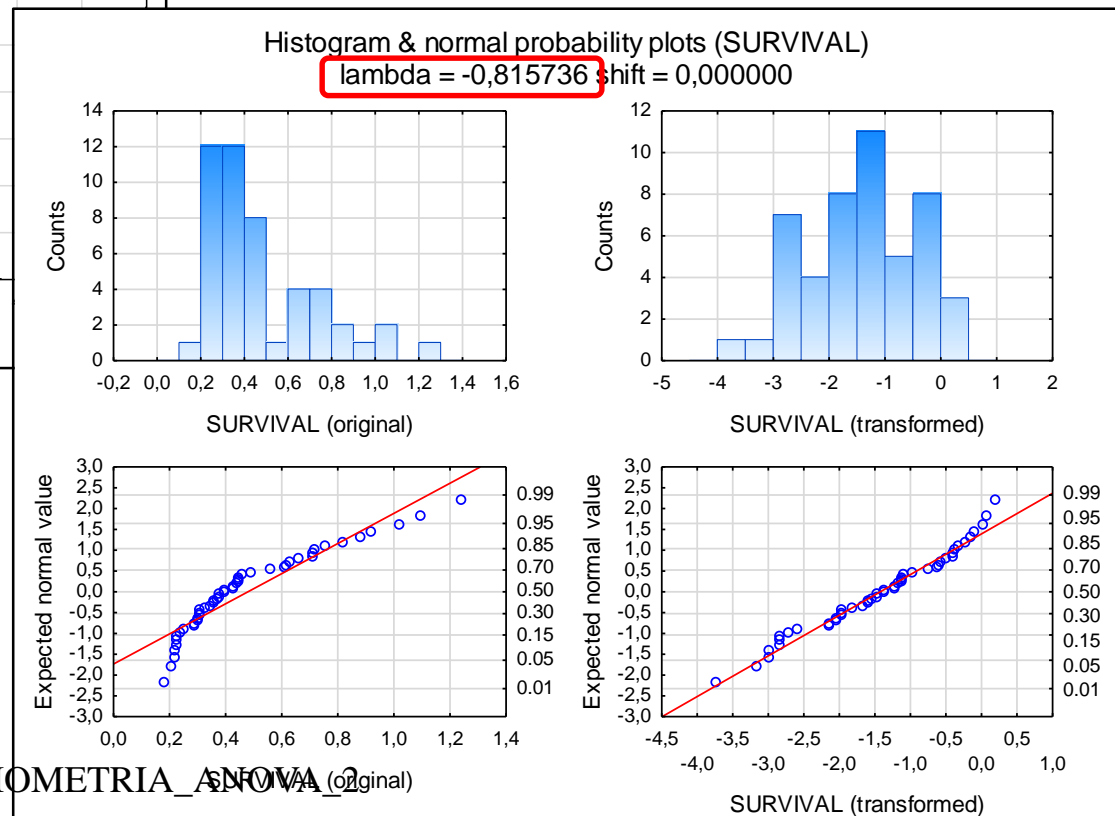
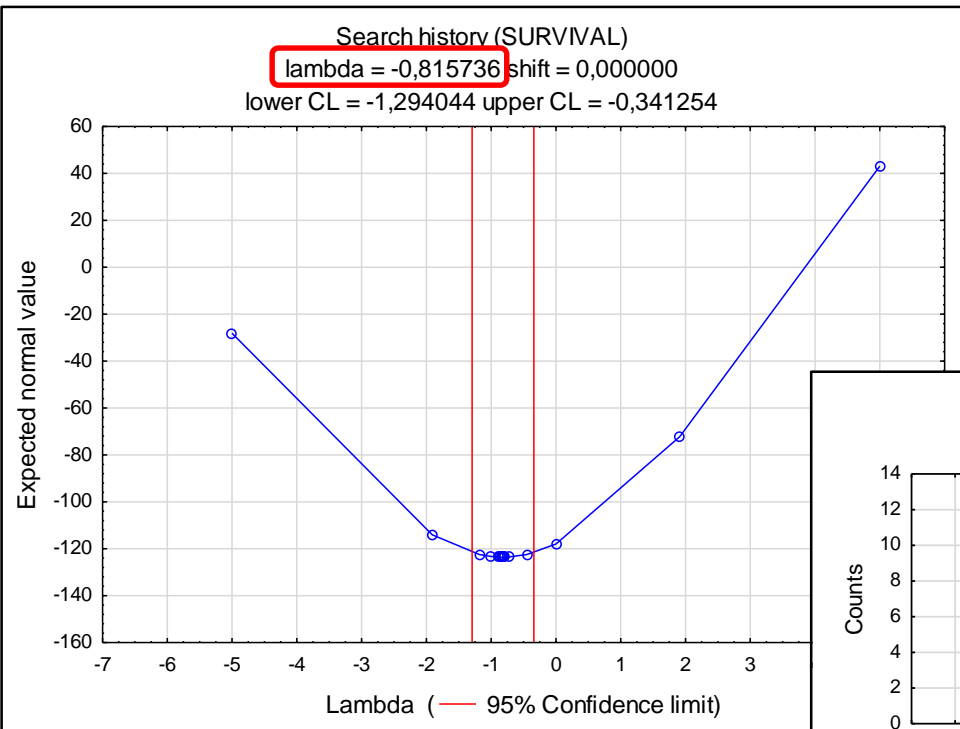
$$y^{tr} = 1/y$$

# Az $\lambda$ kitevő megkeresése **statisztikai szoftverrel:**

(Data > Box-Cox transformation)

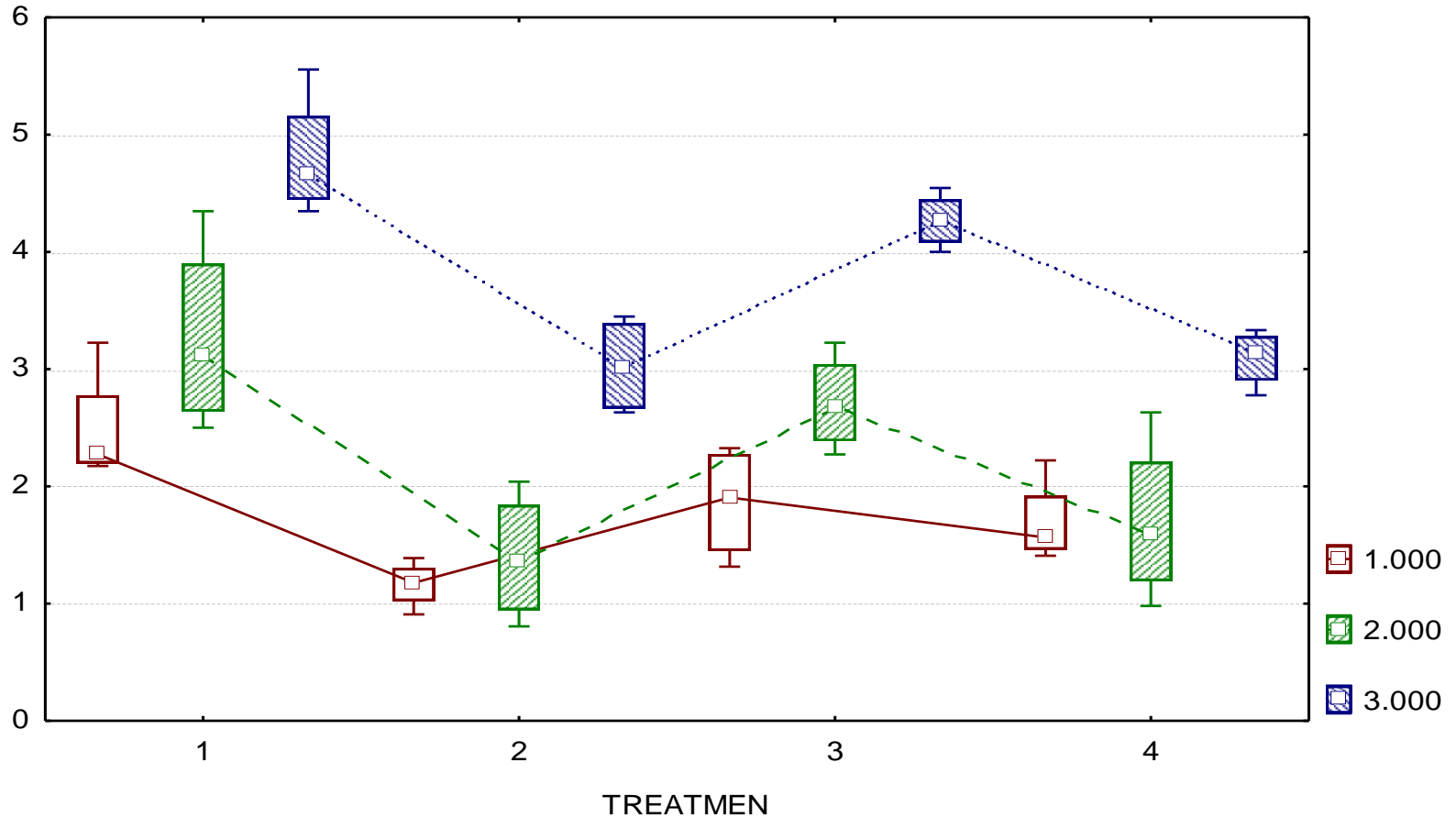
$$y^{tr} = y^\lambda$$

$$\lambda \approx -1$$



# Box-plot ábra a transzformált adatokra

Box Plot of multiple variables grouped by TREATME  
Spreadsheet1 5v\*16c  
Median; Box: 25%-75%; Whisker: Non-Outlier Range



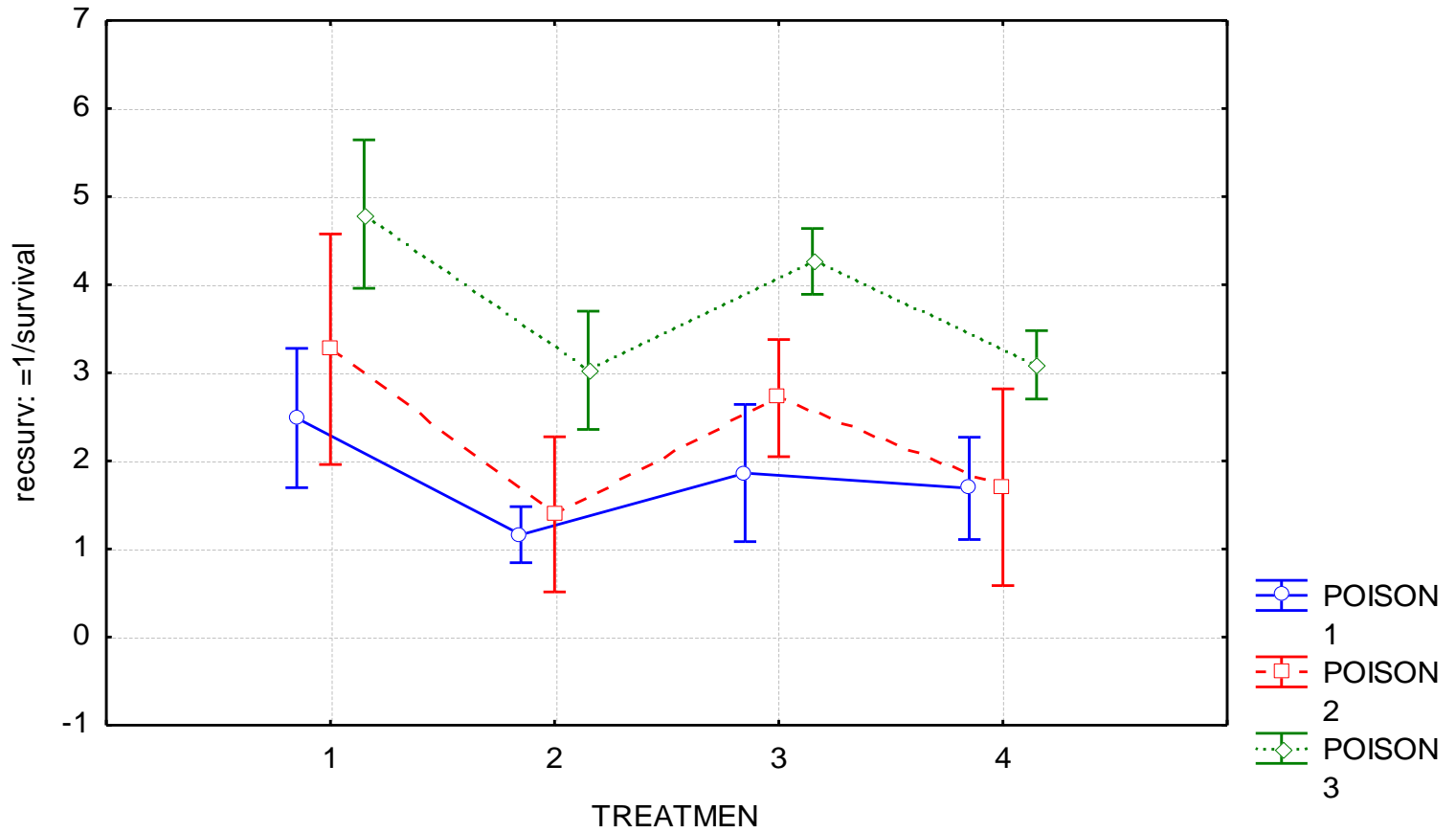


## ANOVA elemzés a transzformált adatokra

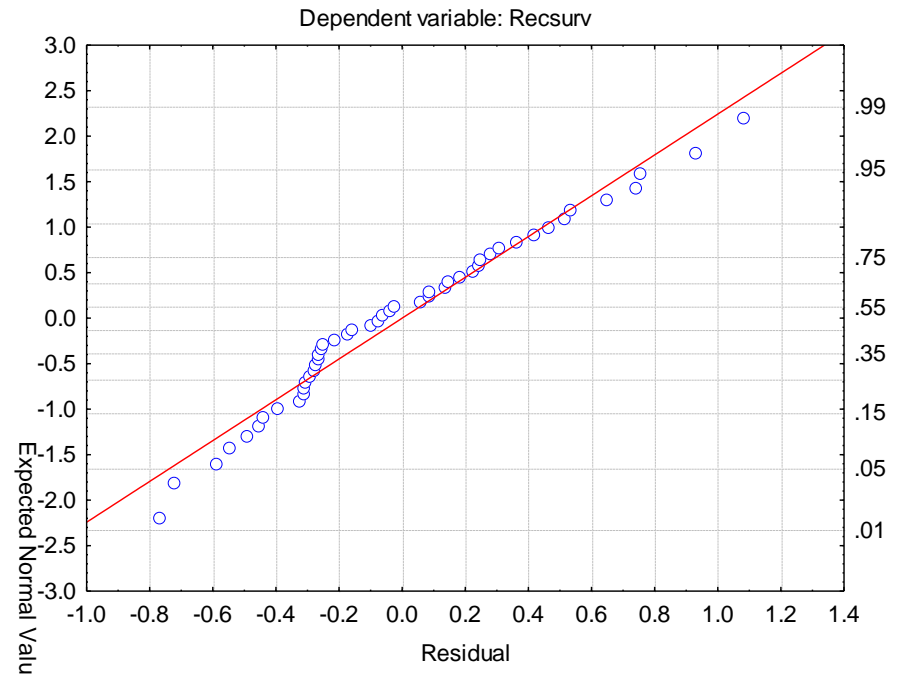
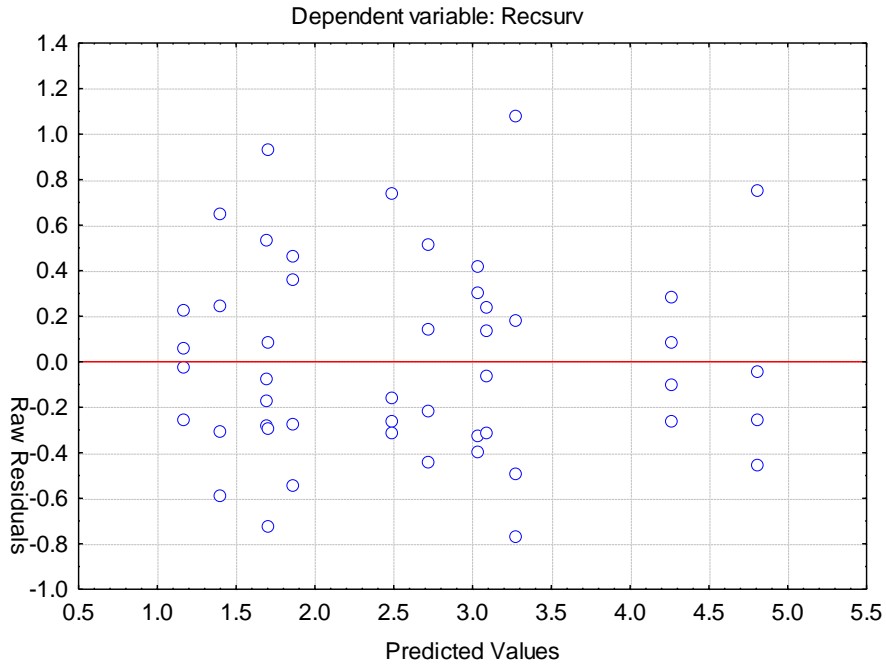
Effect	Univariate Tests of Significance for Recsurv (Poisor Sigma-restricted parameterization Effective hypothesis decomposition)				
	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	330.0892	1	330.0892	1374.881	0.000000
POISON	34.8771	2	17.4386	72.635	0.000000
TREATMEN	20.4143	3	6.8048	28.343	0.000000
POISON*TREATMEN	1.5708	6	0.2618	1.090	0.386733
Error	8.6431	36	0.2401		

A hatások még kifejezettebbek ( $F$  értékei nagyobbak), a kölcsönhatáshoz tartozó  $p$  0.112 helyett 0.387 lesz.

POISON\*TREATMEN; Weighted Mean  
Current effect:  $F(6, 36)=1.0904, p=.3867$   
Effective hypothesis decomposition  
Vertical bars denote 0.95 confidence intervals



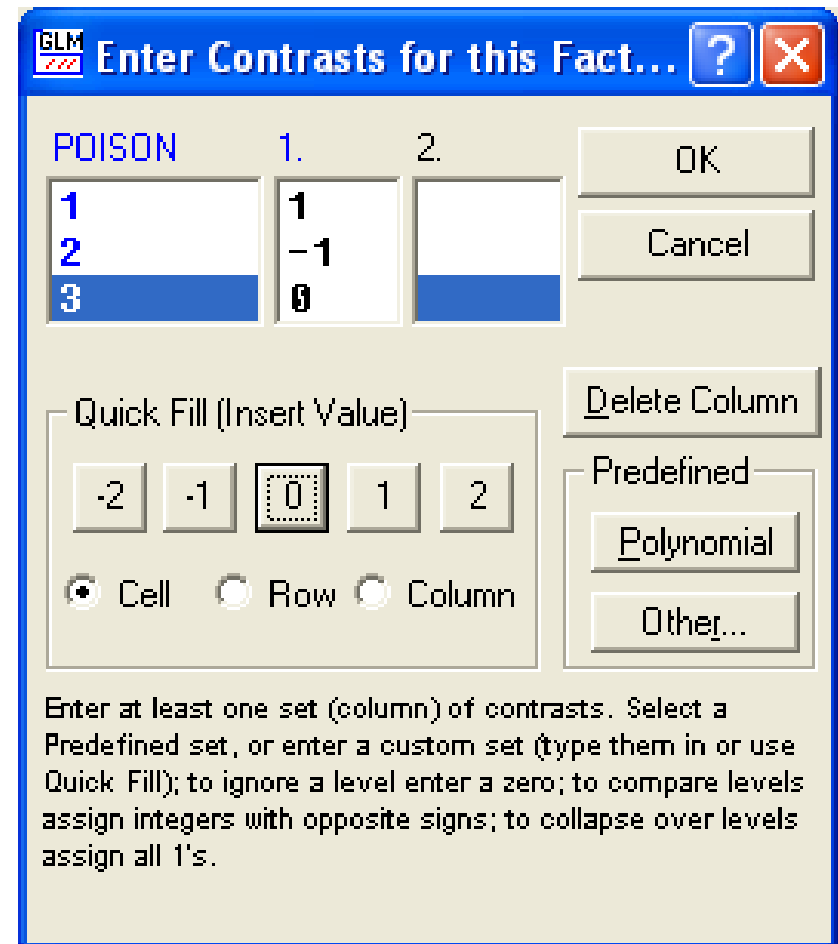
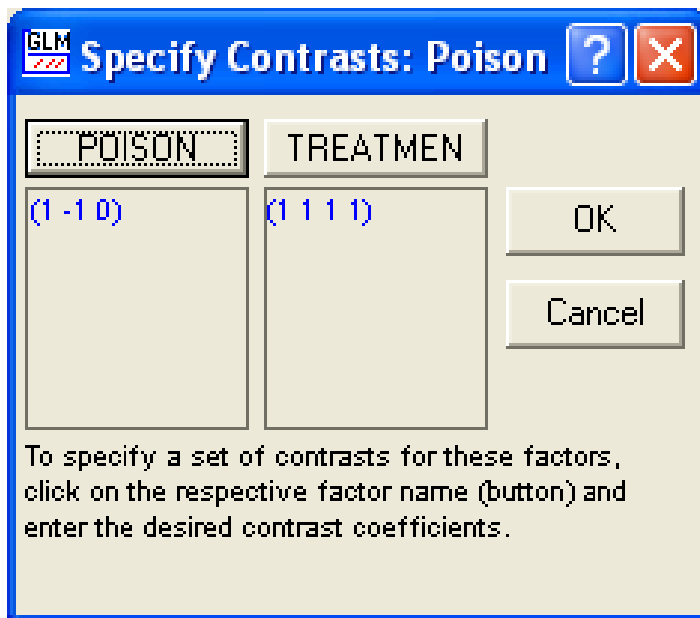
# Reziduumok vizsgálata a transzformált adatokra



# Többszörös összehasonlítások

Pl.: Különbözik-e az 1. és 2. mérég?  $H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.}$

Kontrasztok megadása:



(Planned comparisons fülön)

Between Contrast Coefficients (Poison) Coefficients for each cell in the selected effect					
Cell No.	POISON	TREATMEN	Cell N	CNTRST 1	
1	1	1	4	1	1
2	1	2	4	1	1
3	1	3	4	1	1
4	1	4	4	1	1
5	2	1	4	-1	-1
6	2	2	4	-1	-1
7	2	3	4	-1	-1
8	2	4	4	-1	-1
9	3	1	4	0	0
10	3	2	4	0	0
11	3	3	4	0	0
12	3	4	4	0	0

Univariate Test of Significance for Planned Comparison (Poison) Dependent variable: recsurv					
Source	Sum of Squares	Degr. of Freedom	Mean Square	F	p
Effect	1.756997	1	1.756997	7.318209	0.010362
Error	8.643083	36	0.240086		

Döntés?

becsült hatás

$$\mu_1 - \mu_2$$

Contrast Estimates (Poison) Dependent variable: recsurv						
Contrast	Estimate	Std.Err	t	p	-95.00% Cnf.Lmt	+95.00% Cnf.Lmt
CNTRST1	-1.87457	0.692944	-2.70522	0.010362	-3.27992	-0.469210